

# Calcul matriciel

## Bloc 1 – Sciences Mathématiques & Physiques

*Titulaire* : Michel Rigo  
m.rigo@uliege.be

*Assistant.e.s* : Antoine Renard ; Safia Bennabi  
antoine.renard@uliege.be ; s.bennabi@uliege.be

### 1 Signe sommatoire et symbole de Kronecker

#### Exercices au tableau

**Exercice 1.1.** Développer explicitement et calculer les expressions suivantes :

(a) $\sum_{i=1}^3 i^2$	(d) $\sum_{0 \leq i \leq j \leq 4} (j - i)$
(b) $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 ij$	(e) $\sum_{\heartsuit \in \{2,3,5,7\}} (\heartsuit + 1)$
(c) $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i ij$	(f) $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{10} \delta_{i,j}$

**Exercice 1.2.** Montrer les égalités suivantes :

(a) $\sum_{i=1}^n ax_i = a \sum_{i=1}^n x_i$	(b) $\sum_{i=1}^n 1 = n$
--	--------------------------

**Exercice 1.3.** Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{i,j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{i,j}.$$

**Exercice 1.4.** Démontrer la formule

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Exercice 1.5.** Exprimer en fonction de  $n$  les sommes suivantes :

(a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$	(b) $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \frac{1}{n-k+1}$ .
-------------------------------------	---

**Exercice 1.6.** Calculer la somme

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j (j - k) \delta_{j,k+1}.$$

#### Exercices en autonomie

**Exercice 1.7.** Montrer les égalités suivantes :

(a) $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$	(b) $\sum_{i=1}^n a = na$
--	---------------------------

**Exercice 1.8.** Démontrer la formule

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Utiliser cette formule, ainsi que l'Exercice 1.4, pour en déduire la valeur de la somme

$$\sum_{i=0}^m (m-i)(n-i).$$

**Exercice 1.9.** Exprimer en fonction de  $x$  et de  $n$  la somme

$$\sum_{k=0}^n x^k.$$

**Exercice 1.10.** Calculer les sommes suivantes :

(a)  $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \delta_{j,k}$

(b)  $\sum_{k=1}^n kq^{k-1}$

**Exercice 1.11** (Admission Ingénieurs 2000). Démontrer la formule

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

**Exercice 1.12** (Identité de Lagrange). Démontrer que

$$\sum_{1 \leq k < j \leq n} (a_j b_k - a_k b_j)^2 = \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2.$$

## 2 Matrices

### Exercices au tableau

**Exercice 2.1.** On considère les matrices  $A, B, C$  décrites ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2+i & -i \\ -5 & 3i & 4+3i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ 2 & 0 \\ i & 4+i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3i & -4i \end{pmatrix}$$

Effectuer, si possible, les opérations suivantes et simplifier au maximum le résultat obtenu. Lorsqu'une opération n'est pas définie, expliquer pourquoi.

- (a)  $A + B$       (b)  $A + \tilde{B}$       (c)  $AB$       (d)  $A^2$       (e)  $C^2$

**Exercice 2.2.** Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.3.** Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse donnée dans chaque cas.

- (a) Il existe deux matrices  $A, B \in \mathbb{C}_2^2$  telles que  $AB = \mathbf{0}$  et  $BA \neq \mathbf{0}$ , où  $\mathbf{0}$  est la matrice nulle de  $\mathbb{C}_2^2$ .  
 (b) Pour toutes matrices  $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ , on a  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ .  
 (c) Si deux matrices commutent, alors elles sont nécessairement carrées et de même dimension.  
 (d) Pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ , il existe deux matrices distinctes  $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ , autres que les matrices identité et nulle, telles que  $(AB)^\sim = AB$ .  
 (e) Une matrice est hermitienne si et seulement si ses éléments diagonaux sont réels.

**Exercice 2.4.** Soit  $a \in \mathbb{C}$ . Déterminer la forme générale des matrices de  $\mathbb{C}_4^4$  qui commutent avec

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.5.** Soit  $a \in \mathbb{C}$ . Calculer les différentes puissances de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.6.** Soient les matrices  $A = (\delta_{n-i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et  $B = (\delta_{i+1,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ . Calculer  $AB$ .

**Exercice 2.7.** Soit la matrice  $A \in \mathbb{C}_n^n$  définie par  $A = (\delta_{n-i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ . Calculer les puissances successives de  $A$ .

### Exercices en autonomie

**Exercice 2.8.** Déterminer les valeurs des paramètres réels  $\alpha$  et  $\beta$  pour lesquels les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 2 \end{pmatrix}$$

commutent.

**Exercice 2.9** (Interro formative – 16 Novembre 2022). Résoudre

$$(1 \quad -1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & z^2 \\ z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

**Exercice 2.10.** Trouver les vecteurs  $x \in \mathbb{R}^3$  tels que  $Ax = b$ , avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.11.** Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ . On définit les ensembles

$$F = \{Y \in \mathbb{R}_2^2 : AY = 0\}, \quad G = \{Y \in \mathbb{R}_2^2 : YA = 0\}, \quad H = \{Y \in \mathbb{R}_2^2 : AY = YA\}.$$

Déterminer les ensembles  $F$ ,  $G$  et  $H$ , puis les comparer en termes d'inclusion. Que peut-on dire des ensembles  $F \cap G$ ,  $F \cap H$  et  $G \cap H$ ?

**Exercice 2.12.** Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ , on a

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.13.** Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.14.** Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2^2.$$

Calculer les puissances successives de la matrice  $A$ .

**Exercice 2.15.** Pour tout nombre réel  $\theta$ , on pose

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  et pour tout réel  $\theta$ , on a  $(M(\theta))^n = M(n\theta)$ .

**Exercice 2.16.** Soient les matrices  $A = (\delta_{n-i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et  $B = (\delta_{i+1,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ . Calculer  $BA$ .

**Exercice 2.17.** Soit la matrice  $A \in \mathbb{C}_n^n$  définie par  $A = (\frac{1}{n})_{1 \leq i,j \leq n}$ . Calculer  $A^2$ .

**Exercice 2.18.** Soit la matrice  $A \in \mathbb{C}_n^n$  définie par  $A = (\delta_{i+1,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ .

(a) Calculer les puissances successives de  $A$ .

(b) On définit l'indice de nilpotence d'une matrice  $M \in \mathbb{C}_n^n$  comme étant le plus petit naturel  $m$  tel que  $M^m = 0$ . Déterminer l'indice de nilpotence de la matrice  $A$ .

**Exercice 2.19.** Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec la matrice  $A \in \mathbb{C}_n^n$  définie par  $A = (\delta_{n+1-i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ .

**Exercice 2.20.** Soit  $A \in \mathbb{C}_n^n$ . Notons  $\mathbf{0}$  la matrice nulle de  $\mathbb{C}_n^n$ . Calculer les puissances successives de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} & A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A & \mathbf{0} & A \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.21.** Considérons les matrices de  $\mathbb{C}_n^n$  suivantes

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que  $M$  et  $N$  commutent.

### 3 Permutations

#### Exercices au tableau

**Exercice 3.1.** Considérons la permutation

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 4 & 7 & 2 & 6 & 1 & 8 & 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Décomposer  $\mu$  en un produit de cycles disjoints.
- Décomposer  $\mu$  en un produit de transpositions (cycles de longueur 2).
- En déduire la signature de la permutation (et sa parité).

**Exercice 3.2.** Soient les permutations  $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $\mu\nu$ ,  $\nu\mu$ ,  $\mu\mu$  et  $\nu\nu$ . Les permutations  $\mu$  et  $\nu$  commutent-elles ?
- Quels sont les éléments appartenant à  $\{\mu^n | n \in \mathbb{N}\}$  et  $\{\nu^n | n \in \mathbb{N}\}$  respectivement ?
- Quel est l'inverse de  $\mu$  ?
- Décomposer  $\mu$  et  $\nu$  en un produit de cycles disjoints.
- Décomposer  $\mu$  en un produit de transpositions.
- Quelle est la signature de  $\mu$ , de  $\nu$  et de  $\mu\nu$  ?

**Exercice 3.3.** Soit  $n \geq 3$ . Toute permutation de  $\mathcal{S}_n$  est un produit de cycles de longueur 3, vrai ou faux ? Justifier.

#### Exercices en autonomie

**Exercice 3.4.** Considérons la permutation

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 9 & 1 & 3 & 2 & 11 & 12 & 10 & 4 & 13 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

- Décomposer  $\mu$  en un produit de cycles disjoints.
- Calculer la signature de  $\mu$  et en déduire sa parité.

**Exercice 3.5.** Soient les permutations

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Décomposer  $\mu$  et  $\nu$  en un produit de cycles disjoints.
- Décomposer  $\mu$  et  $\nu$  en un produit de transpositions.
- En déduire la signature de  $\mu$  et de  $\nu$ .
- Donner les permutations  $\mu^{100}$  et  $\nu^{100}$ .

**Exercice 3.6** (Examen Janvier 2023). Pour les quatre permutations suivantes, déterminer leur signature en explicitant et justifiant votre raisonnement.

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \nu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

et  $\nu_4$  est une permutation de  $\{1, \dots, n\}$  définie par

$$\nu_4 : i \mapsto \begin{cases} i & \text{si } i \notin \{k, n-k\}, \\ n-i & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec  $n, k$  fixés tels que  $n \geq 4$  et  $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ .

**Exercice 3.7.** Soit  $n \in \mathbb{N}_0$ . Déterminer la signature de la permutation

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3.8.** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $\tau$  une transposition de  $\mathcal{S}_n$ . Montrer que  $f : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n : \mu \mapsto \tau\mu$  et  $g : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n : \mu \mapsto \mu\tau$  sont des bijections de  $\mathcal{S}_n$  dans lui-même.

**Exercice 3.9.** Soient  $n, k \in \mathbb{N}$  tels que  $n \geq 2$  et  $2 \leq k \leq n$ . Combien y a-t-il de cycles de longueur  $k$  dans le groupe  $\mathcal{S}_n$  ?

## 4 Déterminants, indépendance linéaire et rang d'une matrice

### Exercices au tableau

**Exercice 4.1.** Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 4.2.** Calculer et factoriser les déterminants

$$D = \begin{vmatrix} a & 3b & 0 & 0 \\ b & a & 2b & 0 \\ 0 & 2b & a & b \\ 0 & 0 & 3b & a \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{vmatrix} x & -y & -x & y \\ y & x & -y & x \\ z & -u & z & -u \\ u & z & u & z \end{vmatrix}.$$

**Exercice 4.3.** Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 \end{vmatrix},$$

où  $a_1, \dots, a_n$  sont des paramètres réels ( $n \in \mathbb{N}_0$ ).

**Exercice 4.4.** Soit  $n \in \mathbb{N}_0$ . Calculer le déterminant  $D_n(x, y)$  de la matrice

$$M_n(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & \dots & y \\ y & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y \\ y & \dots & y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_n^n.$$

**Exercice 4.5.** Les vecteurs suivants de  $\mathbb{R}^2$  sont-ils linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$  ?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 4.6.** Déterminer si les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  suivants sont linéairement dépendants ou indépendants.

$$(a) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$(b) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(c) \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.7.** Montrer que les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3i \\ -14 \\ 7i \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$  et linéairement dépendants sur  $\mathbb{C}$ .



**Exercice 4.8.** Soit  $m \in \mathbb{R}$ . On considère les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de  $m$  ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

**Exercice 4.9.** Soient  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$  trois vecteurs linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ . Posons

$$v_1 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$v_2 = a_1 - a_2 + a_3,$$

$$v_3 = a_1 + a_2 - a_3.$$

Les vecteurs  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$  sont-ils linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 4.10.** Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.11.** Discuter, en fonction du paramètre complexe  $m$ , le rang de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.12.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Calculer le rang de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.13.** Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & b \\ a & c & d \end{pmatrix}.$$

Discuter la valeur du rang de la matrice  $M$  en fonction des paramètres réels  $a, b, c$  et  $d$ .

### Exercices en autonomie

**Exercice 4.14.** Calculer les déterminants suivants, où  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x, y, z \in \mathbb{R}$  :

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

**Exercice 4.15.** Calculer le déterminant des matrices suivantes, où  $a, b, c \in \mathbb{R}$  :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.16.** Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & 0 & -(n-1) & 1 \end{vmatrix} = n!.$$

**Exercice 4.17.** Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$E_n(\lambda, a, b) = \begin{vmatrix} \lambda & a & \cdots & a \\ b & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \lambda \end{vmatrix} = \begin{cases} \frac{a(\lambda-b)^n - b(\lambda-a)^n}{a-b} & \text{si } a \neq b, \\ (\lambda-a)^{n-1}(\lambda+(n-1)a) & \text{si } a = b. \end{cases}$$

**Exercice 4.18.** Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Calculer et factoriser le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} -7iz^2 - z & 2 & 1 \\ 1 & i & 0 \\ 4z^2 - z & -7/4 & -1 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 4.19** (Interro formative - 16 Novembre 2022). A quelle(s) condition(s) sur  $z \in \mathbb{C}$  la matrice suivante possède-t-elle un déterminant nul ?

$$\begin{pmatrix} 1 & z+2 & -1 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.20.** Les vecteurs suivants sont linéairement dépendants ou indépendants sur  $\mathbb{R}$  ?

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, & \text{(e)} \quad z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, z_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \text{(b)} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, & \text{(f)} \quad r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \text{(c)} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 36 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{(g)} \quad s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \text{(d)} \quad y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{(h)} \quad t_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, t_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \text{(i)} \quad x_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

**Exercice 4.21.** Les vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  suivants sont-ils linéairement indépendants ?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.22.** Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel  $a$  les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$  ?

$$u = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.23.** Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel  $m$  les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$  ?

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} m \\ m-1 \\ m \\ m \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} m \\ 2m-1 \\ m \\ 3m-1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} m^2-m \\ m^2-m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.24.** Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$  ?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Qu'en est-il des vecteurs suivants ?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.25.** Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$  ?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Qu'en est-il des vecteurs suivants ?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.26** (Examen Janvier 2024). On donne  $x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R}^8$  tels que  $x_1, x_2$  sont linéairement dépendants et  $x_3, x_4, x_5$  aussi. On ne peut jamais trouver 3 vecteurs linéairement indépendants parmi  $x_1, \dots, x_5$ . Vrai ou faux ? Justifier.

**Exercice 4.27.** Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -13 \\ 3 & -3 & 15 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.28.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Calculer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & \lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.29.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Discuter la valeur du rang des matrices suivantes en fonction des paramètres réels donnés :

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ a & b & -2a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b & b & a \\ b & a & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.30** (Examen Septembre 2023). Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & \lambda & 1 \\ \lambda & 3 & 1 & 2 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 2 & 3 & -1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Que vaut le rang de  $A$  en fonction du paramètre  $\lambda \in \mathbb{C}$  ?

**Exercice 4.31** (Examen Janvier 2024). Déterminer le rang de la matrice suivante en fonction des paramètres  $a, c \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & c \end{pmatrix}.$$

## 5 Inverses de matrices

### Exercices au tableau

**Exercice 5.1.** Si possible, inverser la matrice

$$M = \begin{pmatrix} i & -i & 1+i \\ i & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5.2.** Soient  $A, B, C, D$  des matrices avec  $A$  et  $D$  carrées et inversibles. Démontrer que les matrices

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

sont inversibles et calculer leur inverse.

**Exercice 5.3.** Si possible, calculer l'inverse de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5.4.** En utilisant les formules de Frobenius-Schur, calculer

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\ -b & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

### Exercices en autonomie

**Exercice 5.5.** Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . Considérons la matrice complexe

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k & \cdots & \cdots & a_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

À quelles conditions la matrice  $M$  est-elle inversible? Que vaut alors son inverse?

*Suggestion :* Utiliser l'Exercice 5.2 avec un découpage en blocs adéquat.

**Exercice 5.6** (Partiel Janvier 2006). Soit  $A$  une matrice de  $\mathbb{C}_n^n$  pour laquelle il existe un entier  $k \geq 2$  tel que

$$A^k = 0 \quad \text{et} \quad A^{k-1} \neq 0.$$

Posons  $B = I - A$  où  $I \in \mathbb{C}_n^n$  est la matrice identité de dimension  $n$ . Démontrer que  $A$  n'est pas inversible. Puis, démontrer que  $B$  est inversible et que  $B^{-1} = \sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell$ .

**Exercice 5.7** (Partiel Janvier 2009). Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . On considère la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs du paramètre  $\alpha$  pour lesquelles la matrice  $M$  est inversible et, dans ce cas, donner son inverse.

**Exercice 5.8.** Si  $A, B, C, D$  sont des matrices de  $\mathbb{C}_n^n$  et si  $I$  est la matrice identité de  $\mathbb{C}_n^n$ , calculer

$$\begin{vmatrix} 0 & I & D \\ I & A & 0 \\ C & 0 & B \end{vmatrix}.$$

**Exercice 5.9.** Soient  $A, B, C, S$  des matrices de  $\mathbb{C}_n^n$ , et notons  $I$  la matrice identité de  $\mathbb{C}_n^n$ . Considérons les matrices

$$M = \begin{pmatrix} I & -I \\ S & S \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ A & B & C \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

À quelles conditions les matrices  $M$  et  $N$  sont-elles inversibles? Dans ces conditions, calculer leurs inverses.

**Exercice 5.10.** Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel  $m$  les matrices suivantes sont-elles inversibles?

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 \\ 2 & 2m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5.11** (Examen Septembre 2023). Résoudre

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 36 \\ 27 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 5.12** (Examen Juin 2019). Pour quelles valeurs de  $x \in \mathbb{C}$  a-t-on

$$(1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x & 1 & x \\ 1 & x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0?$$

**Exercice 5.13** (Examen Juin 2021). Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \beta^3 \\ \beta & \beta & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \beta^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculer le déterminant de  $M$ .
- Déterminer quand cette matrice est inversible en fonction du paramètre complexe  $\beta$ .
- Quand la matrice n'est pas inversible, quel est son rang?

**Exercice 5.14** (Examen Août 2024). Pour quelles valeurs de  $\lambda$  la matrice suivante est-elle inversible?

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lorsque la matrice n'est pas inversible, donner un vecteur colonne  $x \neq 0$  et un vecteur ligne  $y \neq 0$  tels que  $Mx = 0$  et  $yM = 0$ .

## 6 Espaces vectoriels (1)

### Rappels

**Définition 6.1** (VII.1.1, p. 121, version 2009-2010). Soit  $\mathbb{K}$  un champ dont le neutre pour l'addition est 0 et le neutre pour la multiplication est 1. Les éléments de  $\mathbb{K}$  sont appelés *scalaires*. Un *espace vectoriel* sur  $\mathbb{K}$  ou  *$\mathbb{K}$ -vectoriel* est un ensemble  $E$  muni d'une opération binaire interne

$$+ : E \times E \rightarrow E$$

et d'une opération interne

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$$

qui jouissent des propriétés suivantes :

- (1)  $(E, +)$  est un groupe commutatif,
- (2) pour tous  $x, y \in E$  et tous scalaires  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  :
  - (2.1)  $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$ , *i.e.* l'opération  $\cdot$  est associative par rapport aux scalaires,
  - (2.2)  $1 \cdot x = x$ , *i.e.* il existe un neutre pour l'opération  $\cdot$ ,
  - (2.3)  $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ , *i.e.* l'opération  $\cdot$  est distributive par rapport aux scalaires,
  - (2.4)  $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ , *i.e.* l'opération  $\cdot$  est distributive par rapport aux vecteurs.

### Exercices au tableau

**Exercice 6.1.** Déterminer si les polynômes

$$P(X) = X^3 - 3X^2 + 3X + 1, \quad Q(X) = X^3 - X^2 + 8X + 2 \quad \text{et} \quad R(X) = 2X^3 - 4X^2 + 9X + 5$$

sont linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 6.2.** On considère  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  comme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

- (a) À quelle(s) condition(s) sur  $z \in \mathbb{C}$  les éléments 1 et  $z$  sont-ils linéairement dépendants sur  $\mathbb{R}$  ?
- (b) À quelle(s) condition(s) sur  $z \in \mathbb{C}_0$  les éléments  $\frac{1}{z}$  et 1 sont-ils linéairement dépendants sur  $\mathbb{R}$  ?
- (c) Démontrer que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , les éléments 1,  $z$  et  $z^2$  sont toujours linéairement dépendants sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 6.3.** Dans l'espace vectoriel des fonctions continues réelles  $C^0(\mathbb{R})$ , étudier l'indépendance linéaire des fonctions

$$f : x \mapsto 1, \quad g : x \mapsto \sin(x) \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \cos(x).$$

**Exercice 6.4.** Considérons le  $\mathbb{C}$ -vectoriel  $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3$ .

- (a) Dans  $E_{\mathbb{C}}$ , les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3i \\ -14 \\ 7i \end{pmatrix}$$

sont-ils linéairement indépendants ?

- (b) Montrer que  $E_{\mathbb{C}}$  peut être considéré comme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .
- (c) Considérons le  $\mathbb{R}$ -vectoriel  $E_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^3$ . Les vecteurs  $v_1, v_2, v_3$  sont-ils linéairement indépendants dans  $E_{\mathbb{R}}$  ?
- (d) Quelle est la dimension de  $E_{\mathbb{R}}$  ?
- (e) Quelle est la dimension de  $E_{\mathbb{C}}$  ?

**Exercice 6.5.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  une base d'un espace vectoriel  $E$  sur le champ  $\mathbb{K}$ . On donne les vecteurs

$$f_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad f_2 = -e_1 + e_2 + 2e_3, \quad f_3 = e_3 - 2e_4 \quad \text{et} \quad f_4 = e_1 - e_2 - e_3.$$

- (a) Démontrer que  $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3, f_4)$  est une base de  $E$ .  
 (b) Exprimer la formule de changement de base permettant de passer de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  et la formule de changement de base permettant de passer de la base  $\mathcal{B}'$  à la base  $\mathcal{B}$ .

**Exercice 6.6.** Considérons  $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . Définissons les polynômes

$$P_1(X) = X, \quad P_2(X) = 2X + 1 \quad \text{et} \quad P_3(X) = X^2 + 2X + 2.$$

- (a) Démontrer que les polynômes  $P_1, P_2, P_3$  forment une base de  $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ .  
 (b) Déterminer les composantes des polynômes  $Q_1, Q_2, Q_3$  dans cette base si

$$Q_1(X) = 1, \quad Q_2(X) = X \quad \text{et} \quad Q_3(X) = X^2.$$

- (c) Écrire en général les formules de changement de base établissant le lien entre les composantes des polynômes de  $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$  dans ces deux bases.

### Exercices en autonomie

**Exercice 6.7.** On considère un espace vectoriel  $(E, +, \cdot)$  sur un corps  $\mathbb{K}$  et un vecteur  $a \in E$ . Démontrer que les opérations

$$\oplus : E \times E \rightarrow E : (x, y) \mapsto x \oplus y = x + y - a$$

et

$$\odot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E : (\lambda, x) \mapsto \lambda \odot x = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot a$$

définissent sur  $E$  une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

**Exercice 6.8.** On définit sur  $\mathbb{R}^2$  des lois  $\oplus$  et  $\odot$  comme suit

$$\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

et

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \left( \lambda, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x - \lambda^2 xy \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Déterminer si l'ensemble  $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 6.9.** Déterminer si les polynômes

$$P(X) = X^3 + 4X^2 - 2X + 3, \quad Q(X) = X^3 + 6X^2 - X + 4 \quad \text{et} \quad R(X) = 3X^3 + 8X^2 - 8X + 7$$

sont linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 6.10.** Dans l'espace vectoriel des fonctions continues réelles  $C^0(\mathbb{R})$ , étudier l'indépendance linéaire de

$$f = m + \cos + \sin, \quad g = 1 + m \cos + \sin \quad \text{et} \quad h = 1 + \cos + m \sin,$$

où  $m$  est un paramètre réel. Dans le cas éventuel où les fonctions sont linéairement dépendantes, exprimer une relation linéaire entre elles.



**Exercice 6.11.** Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

- (Examen Septembre 2023) Si  $f, g$  appartiennent à l'espace vectoriel  $C^0(\mathbb{R})$  des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f, g, f \cdot g$  sont linéairement dépendants.
- (Examen Juin 2023) Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}[x]$  des polynômes à coefficients réels,  $\pi x^2 + 1$ ,  $x^2 + \sqrt{11}x - 3$ ,  $x^2 - 2023x + 24$  et  $x^2 + \sin\left(\frac{\pi}{17}\right)x - 1$  sont linéairement dépendants.
- (Examen Juin 2022) On considère trois vecteurs  $x, y, z$  de  $\mathbb{R}^5$ , si le mineur formé par les trois premières lignes de  $(x \ y \ z)$  est nul, alors les vecteurs sont linéairement dépendants.
- (Examen Juin 2021) Dans un  $\mathbb{C}$ -vectoriel, les éléments  $x, y, z$  sont linéairement indépendants si et seulement si  $2x, iy, (2+i)z$  sont linéairement indépendants.
- (Examen Janvier 2020) Si des vecteurs  $u_1, \dots, u_k$  sont linéairement dépendants, on peut trouver un vecteur  $z$  tel que  $u_1, \dots, u_k, z$  soient linéairement indépendants.

**Exercice 6.12.** Considérons le  $\mathbb{C}$ -vectoriel  $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^4$ .

- Dans  $E_{\mathbb{C}}$ , les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 6 - 9i \\ 2 - 2i \\ 2 \\ -3i \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 + 2i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1 - i \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont-ils linéairement indépendants ?

- Montrer que  $E_{\mathbb{C}}$  peut être considéré comme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .
- Considérons le  $\mathbb{R}$ -vectoriel  $E_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^4$ . Les vecteurs  $v_1, v_2, v_3$  sont-ils linéairement indépendants dans  $E_{\mathbb{R}}$  ?
- Quelle est la dimension de  $E_{\mathbb{R}}$  ?
- Quelle est la dimension de  $E_{\mathbb{C}}$  ?

**Exercice 6.13.** Considérons  $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

- Démontrer que, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , les polynômes  $1, X - a, (X - a)^2$  et  $(X - a)^3$  forment une base de  $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ . Dans la suite, nous noterons  $\mathcal{B}$  cette base.
- Rechercher les composantes d'un élément quelconque dans  $\mathcal{B}$ .
- Écrire la formule de changement de base de la base  $\mathcal{B}' = (1, X, X^2, X^3)$  de  $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$  à la base  $\mathcal{B}$ .

**Exercice 6.14.** Soit  $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$  une base d'un espace vectoriel  $E$  sur le champ  $\mathbb{K}$ .

- Démontrer que les vecteurs

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1 + x_2, \quad \dots, \quad y_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

forment une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$ .

- Établir la formule de changement de base permettant de passer de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

**Exercice 6.15** (Examen Janvier 2023). Vérifier que les trois vecteurs suivants forment une base de  $\mathbb{C}^3$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 + i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les composantes, dans cette base, de

$$\begin{pmatrix} i \\ 3i \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6.16** (Examen Janvier 2019). Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

des éléments de  $\mathbb{R}^4$ .

- (a) Montrer que  $u_1, u_2, u_3, u_4$  forment une base  $U$  de  $\mathbb{R}^4$ .
- (b) On considère les éléments  $w_1 = u_1 + u_2, w_2 = u_1 - u_3, w_3 = u_1 + u_2 + u_3, w_4 = u_2 - u_4$ . On admet qu'ils forment une base  $W$  de  $\mathbb{R}^4$ . Donner la matrice de changement de bases pour passer de la base  $W$  à la base  $U$ .
- (c) Donner les composantes  $3w_1 + w_2 - w_4$  dans la base  $W$  puis, dans la base  $U$ .

## 7 Espaces vectoriels (2)

### Rappels

**Définition 7.1** (VII.5.1, p. 133, version 2009-2010). Soit  $E$  un espace vectoriel. Un sous-ensemble non vide  $F \subset E$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  s'il contient les combinaisons linéaires de ses éléments.

**Proposition 7.2** (VII.5.2, p. 133, version 2009-2010). Soit  $E$  un espace vectoriel sur le champ  $\mathbb{K}$ . Un sous-ensemble  $F \subseteq E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si, et seulement si, les assertions suivantes sont vérifiées :

- (1)  $0 \in F$ ,
- (2) si  $x, y \in F$ , alors  $x + y \in F$ ,
- (3) si  $x \in F$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors  $\lambda x \in F$ .

**Proposition 7.3** (VII.5.5, p. 134, version 2009-2010). Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $F$  est de dimension finie, inférieure ou égale à  $n$ . De plus, si  $\dim(F) = n$ , alors  $F = E$ .

**Proposition 7.4** (VII.5.7, p. 135, version 2009-2010). Soient  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  et soit

$$H = \{f + g \mid f \in F, g \in G\}.$$

Alors  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Ce sous-espace  $H$  est appelé la somme de  $F$  et  $G$  et se note  $F + G$ .

**Théorème 7.5** (VII.5.15, p. 137, version 2009-2010). Si  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie de  $E$ , alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

**Définition 7.6** (VII.5.16, p. 138, version 2009-2010). On dit que la somme  $F + G$  de deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  est **directe** si  $F \cap G = \{0\}$ . Auquel cas, on écrit  $F \oplus G$ .

**Proposition 7.7** (VII.5.25, p. 141, version 2009-2010). La somme de  $p$  sous-espaces vectoriels  $F_1, \dots, F_p$  de  $E$  est directe si et seulement si la somme de  $F_2, \dots, F_p$  est directe ainsi que la somme de  $F_1$  et  $F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ . En particulier,

$$\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_p) = \dim F_1 + \dots + \dim F_p.$$

### Exercices au tableau

**Exercice 7.1.** Soient

$$L = \{p \in \mathbb{C}_{\leq 2}[z] : \forall z \in \mathbb{C}_0, z^2 p\left(\frac{1}{z}\right) = p(z)\}$$

$$\text{et } M = \{p \in \mathbb{C}_{\leq 2}[z] : \forall z \in \mathbb{C}, p(z+1) = p(-z)\}$$

où  $\mathbb{C}_{\leq 2}[z]$  est l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2 à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .

- (a) Montrer que  $L$  et  $M$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}_{\leq 2}[z]$ .
- (b) Déterminer une base et la dimension de  $L$ ,  $M$ ,  $L \cap M$  et  $L + M$ .

**Exercice 7.2.** Considérons  $\mathbb{C}_{\leq 3}[z]$ , l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . Soient

$$A = \{p \in \mathbb{C}_{\leq 3}[z] : p(0) = p(1) = p(2)\}, \quad B = \{D_z p : p \in A\} \quad \text{et} \quad C = \{D_z^2 p : p \in A\}.$$

- Montrer que  $A, B$  et  $C$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}_{\leq 3}[z]$ .
- Déterminer une base et la dimension de chaque sous-espace vectoriel.
- Démontrer que  $\mathbb{C}_{\leq 3}[z] = A \oplus B \oplus C$ .

**Exercice 7.3.** Soient

$$H_n = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^* = A\} \quad \text{et} \quad U_n = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^* = -A\}.$$

Démontrer, si possible, que ce sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}_n^n$  et qu'on a  $\mathbb{C}_n^n = H_n \oplus U_n$  lorsque  $\mathbb{C}_n^n$  est vu

- comme un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel,
- comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Exercice 7.4** (Partiel Janvier 2014). On se place dans  $\mathbb{R}^4$  considéré comme  $\mathbb{R}$ -vectoriel. On considère l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_4 = 0 \right\}$$

et le sous-espace vectoriel

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

- Vérifier que  $F$  est un sous-espace vectoriel et en donner une base.
- $F$  et  $G$  sont-ils en somme directe ?
- Trouver un supplémentaire de  $F + G$ .
- Soit  $H$  le sous-espace vectoriel dont une base est donnée par

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Donner une base de  $H \cap F$  et une base de  $H + F$ .

### Exercices en autonomie

**Exercice 7.5.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ . On définit les ensembles

$$F = \{X \in \mathbb{R}_2^2 : AX = 0\}, \quad G = \{X \in \mathbb{R}_2^2 : XA = 0\} \quad \text{et} \quad H = \{X \in \mathbb{R}_2^2 : AX = XA\}.$$

- Démontrer que  $F, G$  et  $H$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}_2^2$ . Donner ensuite une base et la dimension de chaque sous-espace.
- Décrire  $F \cap G, F \cap H$  et  $G \cap H$ . Démontrer que ces trois ensembles sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}_2^2$ . Donner ensuite une base et la dimension de chaque sous-espace.

**Exercice 7.6.** Considérons  $\mathbb{C}_n^n$  comme un  $\mathbb{C}$ -vectoriel. Soient

$$S_n = \{A \in \mathbb{C}_n^n : \tilde{A} = A\} \quad \text{et} \quad A_n = \{A \in \mathbb{C}_n^n : \tilde{A} = -A\}.$$

Démontrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}_n^n$  et qu'on a  $\mathbb{C}_n^n = S_n \oplus A_n$ .

**Exercice 7.7.** Soient  $A$  et  $B$  les parties de  $\mathbb{R}^4$  définies par

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_3 = x_4^2 + 1 \end{cases} \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soient  $F$  et  $G$  les sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par  $A$  et  $B$ . Démontrer que  $F = G$ .

**Exercice 7.8.** Soit  $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  considéré comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soient

$$P = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad I = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Démontrer que  $E = P \oplus I$ .

**Exercice 7.9** (Examen Juin 2023). Soit  $E = \mathbb{C}_3^2$  le  $\mathbb{C}$ -vectoriel des matrices complexes  $2 \times 3$ . On considère les sous-vectoriels de  $E$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}, \quad G = \left\{ A \in \mathbb{C}_3^2 \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$H = \{A \in \mathbb{C}_3^2 \mid (1 \ 1) A = (0 \ 0 \ 0)\}.$$

- Donner une base de  $F$ .
- Donner une base de  $H$ .
- Donner une base de  $F \cap G$ .
- Les sous-espaces  $F$  et  $H$  sont-ils en somme directe ? Justifier. En particulier, a-t-on  $F \oplus H = \mathbb{C}_3^2$  ?
- Déduire** des points précédents si les espaces  $F \cap G$  et  $H$  sont ou non en somme directe. En particulier, a-t-on  $(F \cap G) \oplus H = \mathbb{C}_3^2$  ?

**Exercice 7.10** (Examen Janvier 2021). On considère le  $\mathbb{C}$ -vectoriel  $E$  des polynômes à coefficients complexes de degré au plus 4 et le sous-ensemble  $F$  suivant

$$F = \{az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}.$$

- Vérifier que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- Donner une base de  $F$  et décomposer  $2z^4 - z^3 - z + 2$  dans celle-ci.
- Quelle est l'intersection de  $F$  avec l'enveloppe linéaire

$$G = \langle z^4 + 1, z^3 + 1, z^2 + 1 \rangle ?$$

En déduire la dimension de  $F + G$ .

- Donner une base d'un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .

**Exercice 7.11** (Partiel Janvier 2008). Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -vectoriel  $E$  tels que  $E = F \oplus G$ . Soit  $(e_1, \dots, e_k)$  une base de  $F$ . Montrer que, pour tout  $g \in G$ ,  $\langle e_1 + g, \dots, e_k + g \rangle$  est un supplémentaire de  $G$  dans  $E$ .

**Exercice 7.12** (Partiel Janvier 2013). Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -vectoriel de dimension  $n \geq 3$  et  $e_1, \dots, e_n \in E$ . On définit les vecteurs

$$t_j = e_j + e_{j+1} + e_{j+2}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n-2\}$$

et  $t_{n-1} = e_1 + e_{n-1} + e_n$ ,  $t_n = e_1 + e_2 + e_n$ .

- Pour  $n = 5$ , montrer que  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  est une base de  $E$  si, et seulement si,  $\mathcal{B}' = \{t_1, \dots, t_n\}$  est une base de  $E$ .
- Pour  $n = 5$ , donner la matrice de changement de base pour passer de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

## 8 Systèmes linéaires

### Rappels

**Définition 8.1** (VI.1.1, p. 101, version 2009-2010). Soient  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Un **système d'équations linéaires** à  $n$  équations et  $p$  inconnues est un système de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Sous forme matricielle, ce système s'écrit  $Ax = b$ , avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_p^n, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

**Définition 8.2** (VI.1.2, p. 101, version 2009-2010). Un système de la forme  $Ax = b$  tel que  $b = 0$  est dit **homogène**. Un système est **compatible** s'il possède au moins une solution. Sinon, il est dit **incompatible**. Si un système possède une et une seule solution, il est dit **déterminé**. S'il possède plus d'une solution, il est dit **indéterminé**. Enfin, deux systèmes sont **équivalents** s'ils possèdent les mêmes solutions.

**Proposition 8.3** (VI.3.3, p. 104, version 2009-2010). Soient  $A \in \mathbb{K}_p^n$  et  $b \in \mathbb{K}^n$ . Le système  $Ax = b$  est compatible si, et seulement si, le rang de  $A$  est égal au rang de  $(A|b)$ .

**Corollaire 8.4** (VI.3.6, p. 105, version 2009-2010). Si le système  $(S)Ax = b$  est compatible, il est équivalent à tout système  $(S')$  obtenu en ne considérant que les lignes de la matrice  $A$  qui sont linéairement indépendantes et en nombre égal au rang de  $A$ .

**Définition 8.5** (VI.4.2, p. 107, version 2009-2010). Un système  $(S)Ax = b$  est dit **de Cramer** si  $A$  est une matrice carrée inversible. Dans ce cas,  $x = A^{-1}b$  et, pour tout  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} \det(C_1 \cdots \underbrace{b}_{j^{\text{ème}} \text{ colonne}} \cdots C_p).$$

En résumé,  $x_j$  est le quotient du déterminant de la matrice  $A$  du système où on a remplacé la  $j^{\text{e}}$  colonne par le second membre  $b$ , par le déterminant de  $A$ . Ces formules sont appelées les **formules de G. Cramer**.

### Exercices au tableau

**Exercice 8.1.** Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$(a) \begin{cases} 2x - 3y + 6z = 3 \\ 4x - y + z = 1 \\ 3x - 2y + 3z = 4 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 5x + 2y - 3z - u = 11 \\ 5x - y + 5z - u - 2v = 2 \\ x - 2y + 4z + u - v = -5 \end{cases}$$

**Exercice 8.2.** Résoudre le système d'équations suivant en discutant selon les valeurs des paramètres réels  $a, b$  et  $c$  :

$$\begin{cases} ax + by = a + b \\ bx + ay = a + b \\ x + y = c \end{cases}$$

**Exercice 8.3** (Examen Janvier 2023). Soit le système suivant où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est un paramètre

$$\begin{cases} x + 3y - z & = 1 \\ x + y & = \lambda \\ 2x + 4y + \lambda z & = 0 \end{cases}.$$

- (a) Étudier la compatibilité du système en fonction de la valeur de  $\lambda$ .  
 (b) Pour quelles valeurs de  $\lambda$  le système est-il de Cramer ? Dans ce cas, donner son unique solution (celle-ci peut faire intervenir  $\lambda$ ).  
 (c) Donner explicitement l'ensemble des solutions quand le système n'est pas de Cramer.

### Exercices en autonomie

**Exercice 8.4.** Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$(a) \begin{cases} 3y + z & = 2 \\ 2x + 5y & = 1 \\ -2x + y + 4z & = 3 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} -x + 2y + z + 3t & = 6 \\ 7x + 2y - 13z + 3t & = -24 \\ 3x + y - 5z - t & = -12 \end{cases}$$

**Exercice 8.5.** Résoudre les systèmes d'équations suivants en discutant selon les valeurs des paramètres réels  $a, b, c$  et  $d$  :

$$(a) \begin{cases} ax + by + z & = 1 \\ x + aby + z & = a \\ x + ay + z & = c \end{cases} \quad (e) \begin{cases} ax + by + az & = a \\ ax + ay + bz & = b \\ bx + by + az & = c \\ bx + ay + bz & = d \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} ax + by + cz & = 1 \\ x + y + z & = c \end{cases} \quad (f) \begin{cases} ay - bz & = a^2 + b^2 \\ -ax + az & = 0 \\ bx - ay & = -a^2 - b^2 \\ x + z & = c \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} ax + by + bz + at & = 1 \\ bx + ay + az + bt & = 1 \\ x + y + z + t & = c \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y + z & = b \\ ax + by + bz & = a^2 \\ ax + cy + dz & = ab \end{cases}$$

**Exercice 8.6** (Examen Juin 2023). Soit le système suivant où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est un paramètre

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 & = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - \lambda x_4 & = \lambda \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + \lambda x_4 & = 0 \end{cases}.$$

- (a) Pour quelle(s) valeur(s) de  $\lambda$  le système est-il compatible ?  
 (b) Décrire l'ensemble des solutions du système quand  $\lambda = 16$ . En particulier, quelle est la dimension de l'ensemble des solutions du système homogène associé ?

**Exercice 8.7** (Examen Juin 2022 – Physique). Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ \beta & -1 & \beta - 1 & 3 \\ \beta & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer le déterminant de  $M$ .  
 (b) Étudier le rang de  $M$  en fonction du paramètre complexe  $\beta$ .  
 (c) Quand le système suivant est-il compatible (on ne demande pas de le résoudre) ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 8.8** (Examen Janvier 2024). Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Le système

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + by + z = 1 \\ x + y + cz = 1 \end{cases}$$

a une unique solution sauf si  $a = b = c = 1$ . Vrai ou faux ? Justifier.

**Exercice 8.9.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et soit le système d'équations

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + \lambda t = 1 \\ 3y - 3z + \lambda t = 0 \\ -x - 3y + 2z - \lambda t = \lambda \end{cases},$$

dont les inconnues sont  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ .

- Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre  $\lambda$  le système est-il compatible ?
- Résoudre le système lorsque  $\lambda = -1$ .

**Exercice 8.10.** On considère un paramètre  $\beta \in \mathbb{C}$  ainsi que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\beta \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & \beta & \beta - 3 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer le rang de  $A$  en fonction du paramètre  $\beta$ .
- En déduire pour quelle(s) valeur(s) de  $\beta$  le système suivant est compatible :

$$\begin{cases} x + 2y - \beta z = 1 - \beta \\ 3y + 5z = 1 - \beta \\ x + \beta y + (\beta - 3)z = 0 \end{cases}.$$

- Pour quelle(s) valeur(s) de  $\beta$  le système admet-il une solution unique ? Justifier.