Université de Liège

Année académique 2023 – 2024

Calcul matriciel

Bloc 1 – Sciences Mathématiques & Physiques

Titulaire : Michel Rigo
m.rigo@uliege.be

Assistant.e.s : Antoine Renard ; Safia Bennabi
antoine.renard@uliege.be ; s.bennabi@uliege.be

1 Signe sommatoire et symbole de Kronecker

Exercice 1.1. Développer explicitement et calculer les expressions suivantes :

(a) $\sum_{i=1}^{3} i^2$

(b) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} ij$

(c) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i} ij$

(d) $\sum_{0\leq i\leq j\leq 4} (j-i)$

(e) $\sum_{\heartsuit\in\{2,3,5,7\}} (\heartsuit+1)$

(f) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{10} \delta_{i,j}$

Exercice 1.2. Montrer les égalités suivantes :

(a) $\sum_{i=1}^{n} ax_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i$

(b) $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$

(c) $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

(d) $\sum_{i=1}^{n} a = na$

Exercice 1.3 (Admission Ingénieurs 2000)**.**

(a) Démontrer les formules suivantes :
  (i) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
  (ii) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{i=0}^{m}(m-i)(n-i)$.

Exercice 1.4. Exprimer en fonction de x et de n la somme $\sum_{k=0}^{n} x^k$.

Exercice 1.5. Exprimer en fonction de n la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 1.6. Montrer

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}.$$

Exercice 1.7. Exprimer en fonction de n la somme $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{n-k+1}$.

Exercice 1.8. Calculer

a) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}(j-k)\,\delta_{j,k+1}$;

b) $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$.

Exercice 1.9. Calculer $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} \delta_{j,k}$.

Exercice 1.10 (Admission Ingénieurs 2000)**.** Démontrer la formule

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 1.11 (Identité de Lagrange)**.** Démontrer que

$$\sum_{1\leq k<j\leq n} (a_jb_k - a_kb_j)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)^2.$$

2 Matrices

Exercice 2.1. Déterminer les valeurs des paramètres réels α et β pour lesquels les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 2 \end{pmatrix}$$

commutent.

Exercice 2.2. Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse donnée dans chaque cas.

(a) Il existe deux matrices $A, B \in \mathbb{C}_2^2$ telles que $AB = \mathbf{0}$ et $BA \neq \mathbf{0}$, où $\mathbf{0}$ est la matrice nulle de $\mathbb{C}_2^2$.

(b) Pour toutes matrices $A, B \in \mathbb{C}_n^n$, on a $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(c) Si deux matrices commutent, alors elles sont nécessairement carrées et de même dimension.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il existe deux matrices distinctes $A, B \in \mathbb{C}_n^n$, autres que les matrices identité et nulle, telles que $(AB)^\sim = AB$.

(e) Une matrice est hermitienne si et seulement si ses éléments diagonaux sont réels.

Exercice 2.4. Soit $a \in \mathbb{C}$. Déterminer la forme générale des matrices de $\mathbb{C}_4^4$ qui commutent avec

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.5. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.6. Soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer les différentes puissances de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.7. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.8. Soient les matrices $A = (\delta_{n-i,j})_{1 \le i,j \le n}$ et $B = (\delta_{i+1,j})_{1 \le i,j \le n}$. Calculer AB et BA.

Exercice 2.9. Soit la matrice $A \in \mathbb{C}_n^n$ définie par $A = (\frac{1}{n})_{1 \le i,j \le n}$. Calculer A^2.

Exercice 2.10. Soit la matrice $A \in \mathbb{C}_n^n$ définie par $A = (\delta_{n-i,j})_{1 \le i,j \le n}$. Calculer les puissances successives de A.
Suggestion : séparer les exposants pairs et les exposants impairs.

Exercice 2.11. Soit la matrice $A \in \mathbb{C}_n^n$ définie par $A = (\delta_{i+1,j})_{1\le i,j\le n}$.

(a) Calculer les puissances successives de A.

(b) On définit l'indice de nilpotence d'une matrice $M \in \mathbb{C}_n^n$ comme étant le plus petit naturel m tel que $M^m = 0$. Déterminer l'indice de nilpotence de la matrice A.

Exercice 2.12. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec la matrice $A \in \mathbb{C}_n^n$ définie par $A = (\delta_{n+1-i,j})_{1\le i,j\le n}$.

Exercice 2.13. Trouver les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.14. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. On définit les ensembles

$$F = \{Y \in \mathbb{R}_2^2 : AY = 0\}, \quad G = \{Y \in \mathbb{R}_2^2 : YA = 0\}, \quad H = \{Y \in \mathbb{R}_2^2 : AY = YA\}.$$

Déterminer les ensembles F, G et H, puis les comparer en termes d'inclusion.

Exercice 2.15. Pour tout nombre réel θ, on pose

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel θ, on a $(M(\theta))^n = M(n\theta)$.

Exercice 2.16. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2^2.$$

Calculer les puissances successives de la matrice A.

Exercice 2.17. Soit $A \in \mathbb{C}_n^n$. Notons $\mathbf{0}$ la matrice nulle de $\mathbb{C}_n^n$. Calculer les puissances successives de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} & A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A & \mathbf{0} & A \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.18. Considérons les matrices de $\mathbb{C}_n^n$ suivantes

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que M et N commutent.

Exercice 2.19 (Interro formative – 16 Novembre 2022)**.** Résoudre

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & z^2 \\ z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

3 Permutations

Exercice 3.1. Considérons la permutation

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 4 & 7 & 2 & 6 & 1 & 8 & 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Décomposer μ en un produit de cycles disjoints.
(b) Décomposer μ en un produit de transpositions (cycles de longueur 2).
(c) En déduire la signature de la permutation (et sa parité).

Exercice 3.2. Considérons la permutation

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 9 & 1 & 3 & 2 & 11 & 12 & 10 & 4 & 13 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Décomposer μ en un produit de cycles disjoints.
(b) Calculer la signature de μ et en déduire sa parité.

Exercice 3.3. Soient les permutations $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $\mu\nu$, $\nu\mu$, $\mu\mu$ et $\nu\nu$. Les permutations μ et ν commutent-elles ?
(b) Quels sont les éléments appartenant à $\{\mu^n | n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\nu^n | n \in \mathbb{N}\}$ respectivement ?
(c) Quel est l'inverse de μ ?
(d) Décomposer μ et ν en un produit de cycles disjoints.
(e) Décomposer μ en un produit de transpositions.
(f) Quelle est la signature de μ, de ν et de $\mu\nu$?

Exercice 3.4. Soient les permutations

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Décomposer μ et ν en un produit de cycles disjoints.
(b) Décomposer μ et ν en un produit de transpositions.
(c) En déduire la signature de μ et de ν.
(d) Donner les permutations μ^{100} et ν^{100}.

Exercice 3.5 (Examen Janvier 2023)**.** Pour les quatre permutations suivantes, déterminer leur signature en explicitant et justifiant votre raisonnement.

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \nu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

et ν_4 est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ définie par

$$\nu_4 : i \mapsto \begin{cases} i & \text{si } i \notin \{k, n-k\}, \\ n-i & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec n, k fixés tels que $n \geq 4$ et $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

Exercice 3.6. Soit $n \in \mathbb{N}_0$. Déterminer la signature de la permutation

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et τ une transposition de $\mathcal{S}_n$. Montrer que $f : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n : \mu \mapsto \tau\mu$ et $g : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n : \mu \mapsto \mu\tau$ sont des bijections de $\mathcal{S}_n$ dans lui-même.

Exercice 3.8. Soit $n \geq 3$. Toute permutation de $\mathcal{S}_n$ est un produit de cycles de longueur 3, vrai ou faux ? Justifier.

Exercice 3.9. Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq 2$ et $2 \leq k \leq n$. Combien y a-t-il de cycles de longueur k dans le groupe $\mathcal{S}_n$?

4 Déterminants, indépendance linéaire et rang d'une matrice

Exercice 4.1. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 4.2. Calculer les déterminants suivants, où $m \in \mathbb{N}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$b = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$e = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

Exercice 4.3. Calculer et factoriser les déterminants

$$D = \begin{vmatrix} a & 3b & 0 & 0 \\ b & a & 2b & 0 \\ 0 & 2b & a & b \\ 0 & 0 & 3b & a \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{vmatrix} x & -y & -x & y \\ y & x & -y & x \\ z & -u & z & -u \\ u & z & u & z \end{vmatrix}.$$

Exercice 4.4. Calculer le déterminant des matrices suivantes, où $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.5. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 \end{vmatrix},$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont des paramètres réels ($n \in \mathbb{N}_0$).

Exercice 4.6. Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$,

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & 0 & -(n-1) & 1 \end{vmatrix} = n!.$$

Exercice 4.7. Soit $n \in \mathbb{N}_0$. Calculer le déterminant $D_n(x,y)$ de la matrice

$$M_n(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y \\ y & \cdots & y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n_n.$$

Exercice 4.8. Démontrer la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, E_n(\lambda,a,b) = \begin{vmatrix} \lambda & a & \cdots & a \\ b & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \lambda \end{vmatrix} = \begin{cases} \frac{a(\lambda-b)^n - b(\lambda-a)^n}{a-b} & \text{si} \quad a \neq b, \\ (\lambda-a)^{n-1}(\lambda+(n-1)a) & \text{si} \quad a = b. \end{cases}$$

Exercice 4.9. Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer et factoriser le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} -7iz^2 - z & 2 & 1 \\ 1 & i & 0 \\ 4z^2 - z & -7/4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 4.10 (Interro formative - 16 Novembre 2022)**.** A quelle(s) condition(s) sur $z \in \mathbb{C}$ la matrice suivante possède-t-elle un déterminant nul ?

$$\begin{pmatrix} 1 & z+2 & -1 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.11. Les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.12. Déterminer si les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants sont linéairement dépendants ou indépendants.

(a) $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

(b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(d) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(e) $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Exercice 4.13. Les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants sont-ils linéairement indépendants ?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, \ t = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.14. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 2 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de m ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 4.15. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel a les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$?

$$u = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix},\ t = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.16. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$?

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} m \\ m-1 \\ m \\ m \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} m \\ 2m-1 \\ m \\ 3m-1 \end{pmatrix},\ t = \begin{pmatrix} m^2-m \\ m^2-m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.17. Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$?

(a) $a = (1,2)^\sim,\ b = (5,36)^\sim,\ c = (4,0)^\sim$
(b) $u = (1,1,1)^\sim,\ v = (2,3,0)^\sim,\ w = (0,1,2)^\sim,\ t = (1,0,1)^\sim$
(c) $x = (5,6,2)^\sim,\ y = (4,0,8)^\sim,\ z = (-5,-6,-2)^\sim,\ r = (0,0,1)^\sim$
(d) $a = (1,2,1)^\sim,\ b = (0,1,5)^\sim$
(e) $u = (1,1,1)^\sim,\ v = (2,3,0)^\sim$
(f) $x = (1,0,2,2)^\sim,\ y = (4,0,8,0)^\sim,\ z = (2,0,4,2)^\sim$
(g) $r = (1,2)^\sim$

Exercice 4.18. Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Qu'en est-ils des vecteurs suivants ?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.19. Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Qu'en est-ils des vecteurs suivants ?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix},\ t = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.20. Soient $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ trois vecteurs linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. Posons

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ v_2 &= a_1 - a_2 + a_3, \\ v_3 &= a_1 + a_2 - a_3. \end{aligned}$$

Les vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ sont-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4.21. Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

(a) (Examen Septembre 2023) Si f, g appartiennent à l'espace vectoriel $C^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, alors $f, g, f \cdot g$ sont linéairement dépendants.

(b) (Examen Juin 2023) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des polynômes à coefficients réels, $\pi x^2 + 1$, $x^2 + \sqrt{11}x - 3$, $x^2 - 2023x + 24$ et $x^2 + \sin\left(\frac{\pi}{17}\right) x - 1$ sont linéairement dépendants.

(c) (Examen Juin 2022) On considère trois vecteurs x, y, z de $\mathbb{R}^5$, si le mineur formé par les trois premières lignes de $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ est nul, alors les vecteurs sont linéairement dépendants.

(d) (Examen Juin 2021) Dans un $\mathbb{C}$-vectoriel, les éléments x, y, z sont linéairement indépendants si et seulement si $2x, iy, (2+i)z$ sont linéairement indépendants.

(e) (Examen Janvier 2020) Si des vecteurs $u_1, ..., u_k$ sont linéairement dépendants, on peut trouver un vecteur z tel que $u_1, ..., u_k, z$ soient linéairement indépendants.

Exercice 4.22. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -13 \\ 3 & -3 & 15 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.23. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.24. Discuter, en fonction du paramètre complexe m, le rang de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.25. Soient $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$. Calculer le rang des matrices

$$M = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & \lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.26. Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & b \\ a & c & d \end{pmatrix}.$$

Discuter la valeur du rang de la matrice M en fonction des paramètres réels a, b, c et d.

Exercice 4.27. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Discuter la valeur du rang des matrices suivantes en fonction des paramètres réels donnés :

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ a & b & -2a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b & b & a \\ b & a & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.28 (Examen Septembre 2023)**.** Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & \lambda & 1 \\ \lambda & 3 & 1 & 2 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 2 & 3 & -1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Que vaut le rang de A en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$?

5 Inverses de matrices

Exercice 5.1. Si possible, inverser la matrice

$$M = \begin{pmatrix} i & -i & 1+i \\ i & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.2. Soient A, B, C, D des matrices avec A et D carrées et inversibles. Démontrer que les matrices

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

sont inversibles et calculer leur inverse.

Exercice 5.3. Si possible, calculer l'inverse de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.4. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Considérons la matrice complexe

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k & \cdots & \cdots & a_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

À quelles conditions la matrice M est-elle inversible ? Que vaut alors son inverse ?

Exercice 5.5 (Partiel Janvier 2006)**.** Soit A une matrice de $\mathbb{C}_n^n$ pour laquelle il existe un entier $k \geq 2$ tel que

$$A^k = 0 \quad \text{et} \quad A^{k-1} \neq 0.$$

Posons $B = I - A$ où $I \in \mathbb{C}_n^n$ est la matrice identité de dimension n. Démontrer

(a) que A n'est pas inversible,
(b) que B est inversible et que $B^{-1} = \sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell$.

Exercice 5.6 (Partiel Janvier 2009)**.** Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On considère la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \overline{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs du paramètre α pour lesquelles la matrice M est inversible et, dans ce cas, donner son inverse.

Exercice 5.7. Si A, B, C, D sont des matrices de $\mathbb{C}_n^n$ et si I est la matrice identité de $\mathbb{C}_n^n$, calculer

$$\begin{vmatrix} 0 & I & D \\ I & A & 0 \\ C & 0 & B \end{vmatrix}.$$

Exercice 5.8. Soient A, B, C, S des matrices de $\mathbb{C}^n_n$, et notons I la matrice identité de $\mathbb{C}^n_n$. Considérons les matrices

$$M = \begin{pmatrix} I & -I \\ S & S \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ A & B & C \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

À quelles conditions les matrices M et N sont-elles inversibles ? Dans ces conditions, calculer leurs inverses.

Exercice 5.9. En utilisant les formules de Frobenius-Schur, calculer

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\ -b & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 5.10. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 \\ 2 & 2m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.11 (Examen Septembre 2023)**.** Résoudre

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 36 \\ 27 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.12 (Examen Juin 2019)**.** Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{C}$ a-t-on

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x & 1 & x \\ 1 & x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,?$$

Exercice 5.13 (Examen Juin 2021)**.** Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \beta^3 \\ \beta & \beta & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \beta^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer le déterminant de M.
(b) Déterminer quand cette matrice est inversible en fonction du paramètre complexe β.
(c) Quand la matrice n'est pas inversible, quel est son rang ?

6 Espaces vectoriels (1)

Rappels

Définition 6.1 (II.2.1, p. 34, version 2009-2010)**.** Un ***groupe*** est un ensemble G muni d'une opération binaire interne et partout définie

$$\circ : G \times G \to G$$

qui jouit des propriétés suivantes :

(1) *associativité*, $\forall a, b, c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$,

(2) *existence d'un neutre*, $\exists e \in G, \forall a \in G : a \circ e = e \circ a = a$ (ce neutre est unique),

(3) *existence d'un inverse*, $\forall a \in G, \exists b \in G : a \circ b = b \circ a = e$ (cet inverse est unique).

Si le groupe G possède la propriété supplémentaire suivante

(4) *commutativité*, $\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a$,

on dit que G est un ***groupe commutatif*** ou ***groupe abélien***.

Définition 6.2 (I.2.1, p. 3, version 2009-2010)**.** Un ***champ*** est un ensemble $\mathbb{K}$ muni d'une application binaire interne et partout définie

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

et d'une application binaire interne et partout définie

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

qui jouissent des propriétés suivantes :

(1) $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe commutatif (on parlera d'opposés pour les inverses dans ce groupe),

(2) l'opération $\cdot$ est associative,

(3) il existe un neutre unique pour l'opération $\cdot$,

(4) l'opération $\cdot$ est distributive par rapport à l'opération $+$, ce qui signifie que, $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$, on a

$$(a + b) \cdot c = a \cdot b + b \cdot c \quad \text{et} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

(5) $\mathbb{K} \neq \{0\}$ et tout élément non nul possède un inverse pour l'opération $\cdot$,

(6) l'opération $\cdot$ est commutative.

Si la dernière propriété n'est pas vérifiée, on dit que $\mathbb{K}$ est un ***corps***.

Définition 6.3 (VII.1.1, p. 121, version 2009-2010)**.** Soit $\mathbb{K}$ un champ dont le neutre pour l'addition est 0 et le neutre pour la multiplication est 1. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés ***scalaires***. Un ***espace vectoriel*** sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-***vectoriel*** est un ensemble E muni d'une opération binaire interne

$$+ : E \times E \to E$$

et d'une opération interne

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$$

qui jouissent des propriétés suivantes :

(1) $(E, +)$ est un groupe commutatif,

(2) pour tous $x, y \in E$ et tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

(2.1) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$, *i.e.* l'opération $\cdot$ est associative par rapport aux scalaires,

(2.2) $1 \cdot x = x$, *i.e.* il existe un neutre pour l'opération $\cdot$,

(2.3) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$, *i.e.* l'opération $\cdot$ est distributive par rapport aux scalaires,

(2.4) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$, *i.e.* l'opération $\cdot$ est distributive par rapport aux vecteurs.

Exercices

Exercice 6.1. On considère un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ sur un corps $\mathbb{K}$ et un vecteur $a \in E$. Démontrer que les opérations

$$\oplus : E \times E \to E : (x, y) \mapsto x \oplus y = x + y - a$$

et

$$\odot : \mathbb{K} \times E \to E : (\lambda, x) \mapsto \lambda \odot x = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot a$$

définissent sur E une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exercice 6.2. On définit sur $\mathbb{R}^2$ des lois $\oplus$ et $\odot$ comme suit

$$\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

et

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \left(\lambda, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x - \lambda^2 xy \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Déterminer si l'ensemble $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.3. Déterminer si les polynômes P, Q, R sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}[X]$ dans les cas suivants :

(a) $P(X) = X^3 - 3X^2 + 3X + 1$, $Q(X) = X^3 - X^2 + 8X + 2$ et $R(X) = 2X^3 - 4X^2 + 9X + 5$.

(b) $P(X) = X^3 + 4X^2 - 2X + 3$, $Q(X) = X^3 + 6X^2 - X + 4$ et $R(X) = 3X^3 + 8X^2 - 8X + 7$.

Exercice 6.4. On considère $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(a) À quelle(s) condition(s) sur $z \in \mathbb{C}$ les éléments 1 et z sont-ils linéairement dépendants sur $\mathbb{R}$?

(b) À quelle(s) condition(s) sur $z \in \mathbb{C}_0$ les éléments $\frac{1}{z}$ et 1 sont-ils linéairement dépendants sur $\mathbb{R}$?

(c) Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, les éléments $1, z$ et z^2 sont toujours linéairement dépendants sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.5. Considérons le $\mathbb{C}$-vectoriel $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^4$.

(a) Dans $E_{\mathbb{C}}$, les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 6 - 9i \\ 2 - 2i \\ 2 \\ -3i \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 + 2i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1 - i \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont-ils linéairement indépendants ?

(b) Montrer que $E_{\mathbb{C}}$ peut être considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(c) Considérons le $\mathbb{R}$-vectoriel $E_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^4$. Les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont-ils linéairement indépendants dans $E_{\mathbb{R}}$?

(d) Quelle est la dimension de $E_{\mathbb{R}}$?

(e) Quelle est la dimension de $E_{\mathbb{C}}$?

Exercice 6.6. Considérons le $\mathbb{C}$-vectoriel $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3$.

(a) Dans $E_{\mathbb{C}}$, les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3i \\ -14 \\ 7i \end{pmatrix}$$

sont-ils linéairement indépendants ?

(b) Montrer que $E_{\mathbb{C}}$ peut être considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(c) Considérons le $\mathbb{R}$-vectoriel $E_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^3$. Les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont-ils linéairement indépendants dans $E_{\mathbb{R}}$?

(d) Quelle est la dimension de $E_{\mathbb{R}}$?

(e) Quelle est la dimension de $E_{\mathbb{C}}$?

Exercice 6.7. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base d'un espace vectoriel E sur le champ $\mathbb{K}$. On donne les vecteurs

$$f_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad f_2 = -e_1 + e_2 + 2e_3, \quad f_3 = e_3 - 2e_4 \quad \text{et} \quad f_4 = e_1 - e_2 - e_3.$$

(a) Démontrer que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E.
(b) Exprimer la formule de changement de base permettant de passer de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et la formule de changement de base permettant de passer de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 6.8. Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{P}_2$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$, *i.e.* $\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$. Définissons les polynômes

$$P_1(X) = X, \quad P_2(X) = 2X + 1 \quad \text{et} \quad P_3(X) = X^2 + 2X + 2.$$

(a) Démontrer que les polynômes P_1, P_2, P_3 forment une base de $\mathcal{P}_2$.
(b) Déterminer les composantes des polynômes Q_1, Q_2, Q_3 dans cette base si

$$Q_1(X) = 1, \quad Q_2(X) = X \quad \text{et} \quad Q_3(X) = X^2.$$

(c) Écrire en général les formules de changement de base établissant le lien entre les composantes des polynômes de $\mathcal{P}_2$ dans ces deux bases.

Exercice 6.9. Dans l'espace vectoriel des fonctions continues réelles $C^0(\mathbb{R})$, étudier l'indépendance linéaire des fonctions

$$f : x \mapsto 1, \quad g : x \mapsto \sin(x) \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \cos(x).$$

Exercice 6.10. Dans l'espace vectoriel des fonctions continues réelles $C^0(\mathbb{R})$, étudier l'indépendance linéaire de

$$f = m + \cos + \sin, \quad g = 1 + m\cos + \sin \quad \text{et} \quad h = 1 + \cos + m\sin,$$

où m est un paramètre réel. Dans le cas éventuel où les fonctions sont linéairement dépendantes, exprimer une relation linéaire entre elles.

Exercice 6.11. Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{P}_3$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$, *i.e.* $\mathcal{P}_3 = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$.
(a) Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, les polynômes 1, $X - a$, $(X - a)^2$ et $(X - a)^3$ forment une base de $\mathcal{P}_3$. Dans la suite, nous noterons $\mathcal{B}$ cette base.
(b) Rechercher les composantes d'un élément quelconque dans $\mathcal{B}$.
(c) Écrire la formule de changement de base de la base $\mathcal{B}' = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathcal{P}_3$ à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 6.12. Soit $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ une base d'un espace vectoriel E sur le champ $\mathbb{K}$.
(a) Démontrer que les vecteurs

$$y_1 = x_1, \; y_2 = x_1 + x_2, \ldots, \; y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

forment une base $\mathcal{B}'$ de E.
(b) Établir la formule de changement de base permettant de passer de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Exercice 6.13 (Examen Janvier 2023)**.** Vérifier que les trois vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{C}^3$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les composantes, dans cette base, de

$$\begin{pmatrix} i \\ 3i \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.14 (Examen Janvier 2019)**.** Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

des éléments de $\mathbb{R}^4$.

(a) Montrer que u_1, u_2, u_3, u_4 forment une base U de $\mathbb{R}^4$.

(b) On considère les éléments $w_1 = u_1 + u_2, w_2 = u_1 - u_3, w_3 = u_1 + u_2 + u_3, w_4 = u_2 - u_4$. On admet qu'ils forment une base W de $\mathbb{R}^4$. Donner la matrice de changement de bases pour passer de la base W à la base U.

(c) Donner les composantes $3w_1 + w_2 - w_4$ dans la base W puis, dans la base U.

7 Espaces vectoriels (2)

Rappels

Proposition 7.1 (VII.3.10, p. 129, version 2009-2010). *Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $U = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de E. Définissons l'application*

$$\Phi_U : E \to \mathbb{K}^n : x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

qui, à un vecteur, associe ses composantes dans la base U. Alors cette application est une bijection telle que, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$, on a $\Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x)$ et $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$.
On dit que les espaces E et $\mathbb{K}^n$ sont **isomorphes** *et que l'application Φ est un* **isomorphisme** *(d'espaces vectoriels) entre ces deux espaces vectoriels. En particulier, des vecteurs $y_1, \ldots, y_k \in E$ sont linéairement dépendants (resp. indépendants) si, et seulement si, $\Phi(y_1), \ldots, \Phi(y_k) \in \mathbb{K}^n$ sont linéairement dépendants (resp. indépendants).*

Définition 7.2 (VII.5.1, p. 133, version 2009-2010). Soit E un espace vectoriel. Un sous-ensemble non vide $F \subset E$ est un ***sous-espace vectoriel*** de E s'il contient les combinaisons linéaires de ses éléments.

Proposition 7.3 (VII.5.2, p. 133, version 2009-2010). *Soit E un espace vectoriel sur le champ $\mathbb{K}$. Un sous-ensemble $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, les assertions suivantes sont vérifiées :*
(1) $0 \in F$,
(2) si $x, y \in F$, alors $x + y \in F$,
(3) si $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x \in F$.

Proposition 7.4 (VII.5.5, p. 134, version 2009-2010). *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie, inférieure ou égale à n. De plus, si* $\dim(F) = n$, *alors $F = E$.*

Proposition 7.5 (VII.5.7, p. 135, version 2009-2010). *Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E et soit*

$$H = \{f + g \mid f \in F, g \in G\}.$$

Alors H est un sous-espace vectoriel de E. Ce sous-espace H est appelé la somme de F et G et se note $F + G$.

Théorème 7.6 (VII.5.15, p. 137, version 2009-2010). *Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, alors*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Définition 7.7 (VII.5.16, p. 138, version 2009-2010). On dit que la somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est ***directe*** si $F \cap G = \{0\}$. Auquel cas, on écrit $F \oplus G$.

Proposition 7.8 (VII.5.25, p. 141, version 2009-2010). *La somme de p sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ de E est directe si et seulement si la somme de $F_2, \ldots, F_p$ est directe ainsi que la somme de F_1 et $F_2 \oplus \ldots \oplus F_p$. En particulier,*

$$\dim (F_1 \oplus \ldots \oplus F_p) = \dim F_1 + \ldots + \dim F_p.$$

Exercices

Exercice 7.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. On définit les ensembles

$$F = \{X \in \mathbb{R}_2^2 : AX = 0\}, \quad G = \{X \in \mathbb{R}_2^2 : XA = 0\} \quad \text{et} \quad H = \{X \in \mathbb{R}_2^2 : AX = XA\}.$$

(a) Démontrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2^2$. Donner ensuite une base et la dimension de chaque sous-espace.
(b) Décrire $F \cap G$, $F \cap H$ et $G \cap H$. Démontrer que ces trois ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2^2$. Donner ensuite une base et la dimension de chaque sous-espace.

Exercice 7.2. Soient

$$\begin{aligned} & L = \{p \in \mathbb{C}_{\leq 2}[z] : \forall z \in \mathbb{C}_0, z^2 p\left(\frac{1}{z}\right) = p(z)\} \\ \text{et} \quad & M = \{p \in \mathbb{C}_{\leq 2}[z] : \forall z \in \mathbb{C}, p(z+1) = p(-z)\} \end{aligned}$$

où $\mathbb{C}_{\leq 2}[z]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$.
(a) Montrer que L et M sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_{\leq 2}[z]$.
(b) Déterminer une base et la dimension de L, M, $L \cap M$ et $L + M$.

Exercice 7.3. Soient

$$H_n = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^* = A\} \quad \text{et} \quad U_n = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^* = -A\}.$$

Démontrer, si possible, que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_n^n$ et qu'on a $\mathbb{C}_n^n = H_n \oplus U_n$ lorsque $\mathbb{C}_n^n$ est vu
(a) comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel,
(b) comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 7.4. Considérons $\mathbb{C}_n^n$ comme un $\mathbb{C}$-vectoriel. Soient

$$S_n = \{A \in \mathbb{C}_n^n : \widetilde{A} = A\} \quad \text{et} \quad A_n = \{A \in \mathbb{C}_n^n : \widetilde{A} = -A\}.$$

Démontrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_n^n$ et qu'on a $\mathbb{C}_n^n = S_n \oplus A_n$.

Exercice 7.5. Soient A et B les parties de $\mathbb{R}^4$ définies par

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_3 = x_4^2 + 1 \end{array} \right. \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soient F et G les sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par A et B. Démontrer que $F = G$.

Exercice 7.6. Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient

$$P = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad I = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Démontrer que $E = P \oplus I$.

Exercice 7.7. Considérons $\mathbb{C}_{\leq 3}[z]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$. Soient

$$A = \{p \in \mathbb{C}_{\leq 3}[z] : p(0) = p(1) = p(2)\}, \quad B = \{D_z p : p \in A\} \quad \text{et} \quad C = \{D_z^2 p : p \in A\}.$$

(a) Montrer que A, B et C sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_{\leq 3}[z]$.
(b) Déterminer une base et la dimension de chaque sous-espace vectoriel.
(c) Démontrer que $\mathbb{C}_{\leq 3}[z] = A \oplus B \oplus C$.

Exercice 7.8 (Partiel Janvier 2013)**.** Soient E un $\mathbb{C}$-vectoriel de dimension $n \geq 3$ et $e_1, ..., e_n \in E$. On définit les vecteurs

$$t_j = e_j + e_{j+1} + e_{j+2}, \quad \forall j \in \{1, ..., n-2\}$$

et $t_{n-1} = e_1 + e_{n-1} + e_n$, $t_n = e_1 + e_2 + e_n$.

(a) Pour $n = 5$, montrer que $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ est une base de E si, et seulement si, $\mathcal{B}' = \{t_1, ..., t_n\}$ est une base de E.

(b) Pour $n = 5$, donner la matrice de changement de base pour passer de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Exercice 7.9 (Partiel Janvier 2008)**.** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-vectoriel E tels que $E = F \oplus G$. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de F. Montrer que, pour tout $g \in G$, $\rangle e_1 + g, \dots, e_k + g \langle$ est un supplémentaire de G dans E.

Exercice 7.10 (Partiel Janvier 2014)**.** On se place dans $\mathbb{R}^4$ considéré comme $\mathbb{R}$-vectoriel. On considère l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_4 = 0 \right\}$$

et le sous-espace vectoriel

$$G = \left\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\langle .$$

(a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel et en donner une base.

(b) F et G sont-ils en somme directe ?

(c) Trouver un supplémentaire de $F + G$.

(d) Soit H le sous-espace vectoriel dont une base est donnée par

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Donner une base de $H \cap F$ et une base de $H + F$.

Exercice 7.11 (Examen Juin 2023)**.** Soit $E = \mathbb{C}_3^2$ le $\mathbb{C}$-vectoriel des matrices complexes 2×3. On considère les sous-vectoriels de E

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}, \quad G = \left\{ A \in \mathbb{C}_3^2 \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$H = \left\{ A \in \mathbb{C}_3^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Donner une base de F.

(b) Donner une base de H.

(c) Donner une base de $F \cap G$.

(d) Les sous-espaces F et H sont-ils en somme directe ? Justifier. En particulier, a-t-on $F \oplus H = \mathbb{C}_3^2$?

(e) ***Déduire*** des points précédents si les espaces $F \cap G$ et H sont ou non en somme directe. En particulier, a-t-on $(F \cap G) \oplus H = \mathbb{C}_3^2$?

Exercice 7.12 (Examen Janvier 2021)**.** On considère le $\mathbb{C}$-vectoriel E des polynômes à coefficients complexes de degré au plus 4 et le sous-ensemble F suivant

$$F = \{az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}.$$

(a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E.
(b) Donner une base de F et décomposer $2z^4 - z^3 - z + 2$ dans celle-ci.
(c) Quelle est l'intersection de F avec l'enveloppe linéaire

$$G = \rangle z^4 + 1, z^3 + 1, z^2 + 1 \langle \ ?$$

En déduire la dimension de $F + G$.
(d) Donner une base d'un supplémentaire de F dans E.

8 Systèmes linéaires

Rappels

Définition 8.1 (VI.1.1, p. 101, version 2009-2010)**.** Soient $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Un ***système d'équations linéaires*** à n équations et p inconnues est un système de la forme

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array} \right. .$$

Sous forme matricielle, ce système s'écrit $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n_p, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Définition 8.2 (VI.1.2, p. 101, version 2009-2010)**.** Un système de la forme $Ax = b$ tel que $b = 0$ est dit ***homogène***. Un système est ***compatible*** s'il possède au moins une solution. Sinon, il est dit ***incompatible***. Par exemple, un système homogène est toujours compatible puisqu'il possède toujours la solution $x = 0$. Si un système possède une et une seule solution, il est dit ***déterminé***. S'il possède plus d'une solution, il est dit ***indéterminé***. Enfin, deux systèmes sont ***équivalents*** s'ils possèdent les mêmes solutions.

Proposition 8.3 (VI.3.3, p. 104, version 2009-2010)**.** *Soient $A \in \mathbb{K}^n_p$ et $b \in \mathbb{K}^n$. Le système $(S) Ax = b$ est compatible si, et seulement si, le rang de A est égal au rang de $(A|b)$.*

Corollaire 8.4 (VI.3.6, p. 105, version 2009-2010)**.** *Si le système $(S) Ax = b$ est compatible, il est équivalent à tout système (S') obtenu en ne considérant que les lignes de la matrice A qui sont linéairement indépendantes et en nombre égal au rang de A.*

Définition 8.5 (VI.4.2, p. 107, version 2009-2010)**.** Un système $(S) Ax = b$ est dit ***de Cramer*** si A est une matrice carrée inversible. Dans ce cas, $x = A^{-1}b$ et, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$,

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} \det(C_1 \cdots \underbrace{b}_{j^{\text{ème}} \text{ colonne}} \cdots C_p).$$

En résumé, x_j est le quotient du déterminant de la matrice A du système où on a remplacé la j^{e} colonne par le second membre b, par le déterminant de A. Ces formules sont appelées les ***formules de G. Cramer***.

Exercices

Exercice 8.1. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{lcl} 2x - 3y + 6z & = & 3 \\ 4x - y + z & = & 1 \\ 3x - 2y + 3z & = & 4 \end{array} \right. \qquad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{lcl} 5x + 2y - 3u - v & = & 11 \\ 5x - y + 5z - u - 2v & = & 2 \\ x - 2y + 4z + u - v & = & -5 \end{array} \right.$$

$$\text{(b)} \left\{ \begin{array}{lcl} 3y + z & = & 2 \\ 2x + 5y & = & 1 \\ -2x + y + 4z & = & 3 \end{array} \right. \qquad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{lcl} -x + 2y + z + 3t & = & 6 \\ 7x + 2y - 13z + 3t & = & -24 \\ 3x + y - 5z - t & = & -12 \end{array} \right.$$

Exercice 8.2. Résoudre les systèmes d'équations suivants en discutant selon les valeurs des paramètres réels a, b, c et d :

(a) $\begin{cases} ax+by &= a+b \\ bx+ay &= a+b \\ x+y &= c \end{cases}$

(b) $\begin{cases} ax+by+z &= 1 \\ x+aby+z &= a \\ x+ay+z &= c \end{cases}$

(c) $\begin{cases} ax+by+cz &= 1 \\ x+y+z &= c \end{cases}$

(d) $\begin{cases} ax+by+bz+at &= 1 \\ bx+ay+az+bt &= 1 \\ x+y+z+t &= c \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x+y+z &= b \\ ax+by+bz &= a^2 \\ ax+cy+dz &= ab \end{cases}$

(f) $\begin{cases} ax+by+az &= a \\ ax+ay+bz &= b \\ bx+by+az &= c \\ bx+ay+bz &= d \end{cases}$

(g) $\begin{cases} ay-bz &= a^2+b^2 \\ -ax+az &= 0 \\ bx-ay &= -a^2-b^2 \\ x+z &= c \end{cases}$

Exercice 8.3 (Examen Juin 2023)**.** Soit le système suivant où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+\lambda x_4 &= 1 \\ 3x_1+x_2+2x_3-\lambda x_4 &= \lambda \\ 2x_1+3x_2-x_3+\lambda x_4 &= 0 \end{cases}.$$

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système est-il compatible ?
(b) Décrire l'ensemble des solutions du système quand $\lambda = 16$. En particulier, quelle est la dimension de l'ensemble des solutions du système homogène associé ?

Exercice 8.4 (Examen Janvier 2023)**.** Soit le système suivant où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre

$$\begin{cases} x+3y-z &= 1 \\ x+y &= \lambda \\ 2x+4y+\lambda z &= 0 \end{cases}.$$

(a) Étudier la compatibilité du système en fonction de la valeur de λ.
(b) Pour quelles valeurs de λ le système est-il de Cramer ? Dans ce cas, donner son unique solution (celle-ci peut faire intervenir λ).
(c) Donner explicitement l'ensemble des solutions quand le système n'est pas de Cramer.

Exercice 8.5 (Examen Juin 2022 – Physique)**.** Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ \beta & -1 & \beta-1 & 3 \\ \beta & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer le déterminant de M.
(b) Étudier le rang de M en fonction du paramètre complexe β.
(c) Quand le système suivant est-il compatible (on ne demande pas de le résoudre) ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.6 (Examen Janvier 2019)**.** Pour quelles valeurs de λ la matrice suivante est-elle inversible ?

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lorsque la matrice n'est pas inversible, donner un vecteur colonne $x \neq 0$ et un vecteur ligne $y \neq 0$ tels que $Mx = 0$ et $yM = 0$.