Université de Liège Année académique 2024 – 2025

Algèbre linéaire

Bloc 1 – Sciences Mathématiques

Bloc 2 – Sciences Physiques

Solutions et indications pour les exercices en autonomie

Titulaire : Michel Rigo
m.rigo@uliege.be

Assistant : Antoine Renard
antoine.renard@uliege.be

Introduction

Ce document reprend les solutions des exercices proposés dans les sections "Exercices en autonomie" des différentes listes. Ces exercices font partie intégrante du cours, et reflètent donc le genre de questions susceptibles d'être posées lors d'un examen. Seuls les exercices marqués d'une étoile ($\star$) sont à voir comme exercices de dépassement.

Lorsque le format de l'exercice s'y prête (réponse précise attendue), les solutions finales sont données. Dans le cas des exercices nécessitant la rédaction d'une preuve, des indications sont données. Notez aussi que dans certains cas, les solutions données ne sont pas uniques. Ainsi, ce n'est pas parce que vous n'obtenez pas la même réponse que celle présente dans ce correctif que votre raisonnement est erroné.

Bien sûr, même si les solutions sont données dans un but d'auto-correction, vous pouvez toujours me rendre vos résolutions afin que je puisse les relire et vous donner un feedback (sur le raisonnement, la rédaction, etc.).

Notez enfin que, même si ce document est une version 2.0, il peut contenir des coquilles. N'hésitez pas à revenir vers moi en cas de doute. D'avance, un tout grand merci à tout qui participera à l'amélioration de ces solutions !

Bon travail,

Antoine Renard.

1 Polynômes de $\mathbb{C}[z]$

Exercice 1.8. (a) $-2-8(z+1)+16(z+1)^2-12(z+1)^3+3(z+1)^4$.

(b) $3+3(z-2)+6(z-2)^2+2(z-2)^3$.

Exercice 1.9. Les zéros du polynôme sont -3, 2, i et $-i$.

Exercice 1.10. Les zéros du polynôme sont $3i$, $-2-i$ et $-1-2i$.

Exercice 1.11. Par la règle de Descartes, tous les zéros du polynôme doivent être de module inférieur ou égal à $1+\frac{5}{5}=2$.

Exercice 1.12. (a) Les triplets de paramètres de la forme $(a,5,a-2)$, avec $a\in\mathbb{C}$, conviennent.

(b) Seules les valeurs $(a,b,c)=(16,17,6)$ conviennent.

Exercice 1.13. (a) $z^5+2z^4-z^3+22z=(z^3+6z^2+22z+82)(z^2-4z+1)+328z-82$.

(b) $z^4+5z^3+12z^2+19z-7=(z^2+2z+7)(z^2+3z-1)$.

Exercice 1.14. Un pgcd de $z^6-7z^4+8z^3-7z+7$ et $3z^5-7z^3+3z^2-7$ est donné par $D=1+z^3$. On a alors

$$(z^6-7z^4+8z^3-7z+7)\left(\frac{1}{49}(-126z-189)\right)+(3z^5-7z^3+3z^2-7)\left(\frac{1}{49}(42z^2+63z-196)\right)=1+z^3.$$

Exercice 1.15. On peut effectuer l'algorithme d'Euclide sur ces deux polynômes, mais on commencer rapidement à avoir des calculs avec des valeurs un peu embêtante à manipuler mentalement. On peut donc simplement se rendre compte que

$$P(x)=(x+1)(x-2)(x-3)\quad\text{et}\quad Q(x)=(x-1)^2(2x-1)(x+3).$$

N'ayant aucun facteurs communs, P et Q sont premiers entre eux.

Exercice 1.16. (a) Faux : x^2-2x+4 par exemple.

(b) Vrai : $(z-1)^2(z+1)^2$ par exemple.

(c) Vrai : Théorème fondamental de l'Algèbre.

(d) Faux : $P(z)=(z+1)^2$ par exemple.

(e) Vrai : $j=\deg P$ convient toujours.

(f) Vrai : Vient de la propriété que si z_0 est zéro de P, alors $\overline{z_0}$ aussi.

Exercice 1.17. *Suggestion :* Utiliser la définition d'un zéro triple (avec les dérivées). Ce raisonnement est il valable pour tout $n\in\mathbb{N}_0\setminus\{1\}$? Si non, traiter à part les cas exclus.

Exercice 1.18. *Suggestion :* Le cas $n=1$ est facile à traiter. Pour $n\geq 2$, quel est le degré maximum du reste R de la division ? Écrire alors ce reste avec des paramètres pour les coefficients. Évaluer alors l'égalité

$$(\sin(a)-z\cos(a))^n=Q(z)(z^2+1)+R(z)$$

résultant de la division en des valeurs adéquates (ne pas oublier qu'on est dans $\mathbb{C}$, et que c'est R qui nous intéresse ici, pas Q) pour trouver les coefficients du reste.

Solution : Soit R le reste de la division. Pour $n=1$,

$$R(z)=\sin(a)-z\cos(a).$$

Pour $n\geq 2$,

$$R(z)=\sin\left(n\left(a-\frac{\pi}{2}\right)\right)z+\cos\left(n\left(a-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Exercice 1.19. *Suggestion :* Pour la valeur du produit, utiliser les formules de Viète.

Solution : On a

$$z^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(z-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\quad\text{et}\quad\prod_{k=1}^{n-1}e^{\frac{2ik\pi}{n}}=(-1)^{n+1}.$$

2 Fractions rationnelles

Exercice 2.5. (a) Vrai : Les pôles sont définis pour les fractions rationnelles, il faut donc simplifier la seconde fraction pour obtenir un numérateur et un dénominateur premiers entre eux. Après réduction, on garde les mêmes pôles, à savoir -1 et 2.

(b) Vrai : Les pôles sont -1 et 2, et sont donc tous réels.

(c) Faux : Les pôles sont $\pm 2i$ et 2. Sur $\mathbb{R}$, le dénominateur contient donc un facteur irréductible de degré 2, ce qui ne sera pas le cas sur $\mathbb{C}$.

(d) Faux : Si z_0 est un pôle d'ordre α de R, alors nécessairement c'est un pôle d'ordre $\alpha+1$ de D_zR.

Exercice 2.6. $R_1(z) = \dfrac{1}{2(z+1)} + \dfrac{1}{2(z-1)} - \dfrac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, 1\}$ (sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$).

$$R_2(z) = 1 - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{z}{z^2+1} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \pm i\} \text{ (sur } \mathbb{R}\text{)}.$$

$$R_2(z) = 1 - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{2(z+i)} - \frac{1}{2(z-i)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \pm i\} \text{ (sur } \mathbb{C}\text{)}.$$

$$R_3(z) = -\frac{10}{z-1} - \frac{5}{(z-1)^2} + \frac{11}{z-2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\} \text{ (sur } \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{C}\text{)}.$$

Exercice 2.7. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \pm i\sqrt{3}\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{4z^3+13z^2+14z+13}{z^4+2z^3+4z^2+6z+3} &= \frac{1}{z+1} + \frac{2}{(z+1)^2} + \frac{3z+4}{z^2+3} && \text{(sur } \mathbb{R}\text{)} \\
&= \frac{1}{z+1} + \frac{2}{(z+1)^2} + \frac{\frac{1}{2}\left(3+\frac{4\sqrt{3}i}{3}\right)}{z+i\sqrt{3}} + \frac{\frac{1}{2}\left(3-\frac{4\sqrt{3}i}{3}\right)}{z-i\sqrt{3}} && \text{(sur } \mathbb{C}\text{)}.
\end{aligned}$$

Exercice 2.8. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{1, \pm i\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{-x^3+7x^2-5x+7}{(x-1)^2(x^2+1)} &= -\frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{2}{x^2+1} && \text{(sur } \mathbb{R}\text{)} \\
&= -\frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{i}{x+i} - \frac{i}{x-i} && \text{(sur } \mathbb{C}\text{)}
\end{aligned}$$

Exercice 2.9. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 3\}$,

$$\frac{3x^6-12x^5-5x^4+38x^3+15x^2-2x+27}{x^4-4x^3-2x^2+12x+9} = 3x^2+1+\frac{6x^3-10x^2-14x+18}{(x-3)^2(x+1)^2},$$

avec

$$\frac{6x^3-10x^2-14x+18}{(x-3)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2},$$

où $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ sont des constantes telles que

$$\begin{cases} A + C = 6 \\ -A + B - 5C + D = -10 \\ -5A + 2B + 3C - 6D = -14 \\ -3A + B + 9C + 9D = 18 \end{cases}.$$

Exercice 2.10. _Suggestion :_ Pour la première, remplacer z par $(z-1)+1$ au numérateur et utiliser le binôme de Newton. Pour la seconde, chercher les pôles du dénominateur, et évaluer en des valeurs adéquates pour trouver les constantes. Il faut alors chipoter avec les expressions obtenues pour les simplifier.

Solution : On a

$$R_{m,n}(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{(z-1)^{n-k}} & \text{si } m \leq n, \\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} \binom{m}{k}(z-1)^{k-n} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{m}{k}}{(z-1)^{n-k}} & \text{si } m > n, \end{cases} \quad \text{et} \quad R_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}},$$

3 Opérateurs linéaires I

Exercice 3.8. (a) Non : $X = (0,1)$ et $Y = (1,2)$ sont tels que $T_1(X+Y) \neq T_1X + T_1Y$.

(b) Non : KO à cause de la dernière composante, $T_1X + T_1Y$ sera toujours de la forme $(\cdot,\cdot,2)$, alors que $T_1(X+Y)$ sera de la forme $(\cdot,\cdot,1)$

(c) Oui : démonstration classique.

Exercice 3.9. (a) Découle des propriétés des opérations sur les matrices.

(b) Si $\mathcal{C}$ désigne la base canonique, alors

$$M_{\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Des bases de $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$ sont données respectivement par

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 3.10. On a

$$\mathrm{Ker}(T) = \rangle -3z^2 + 1 \langle \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(T) = \rangle z^3, z, 1 \langle.$$

Exercice 3.11. Non. Si une telle application existait, le théorème de la dimension engendrerait une contradiction quant au rang de la matrice qui représente l'application dans une base donnée.

Exercice 3.12. Le noyau est de dimension 2.

Exercice 3.13. (a) Faux : T est injectif si et seulement si $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. Or, on peut très bien avoir $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(\mathrm{Im}(T))$ sans pour autant avoir $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ (un exemple est donné dans l'Exercice 3.9).

(b) Vrai : Découle du théorème de la dimension pour l'application $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3 : x \mapsto Ax$.

(c) Faux : Ce n'est par exemple pas vrai pour l'opérateur nul.

Exercice 3.14. La matrice M est triangulaire supérieure, et ses éléments diagonaux sont nuls. On en tire que

$$Tu_1 = 0, \quad Tu_2 = a_1u_1, \quad Tu_3 = b_1u_1 + b_2u_2 \quad \text{et} \quad Tu_4 = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3,$$

pour des scalaires $a_1, b_1, b_2, c_1c_2, c_3$. De plus, $M^4 = 0$, d'où $T^4x = 0$ pour tout $x \in E$.

Exercice 3.15. La matrice est diagonale par blocs, *i.e.* de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix},$$

où les éléments $*$ sont potentiellement non nuls.

Exercice 3.16. (a) $M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

(b) $M_{\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, avec $\mathcal{B}' = (e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3 - e_4, e_3 + e_4)$.

(c) Des bases de $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$ sont données respectivement par

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

On a donc bien $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = 1 + 3 = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$.

(d) Non, T n'est pas injectif puisque $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.

Exercice 3.17. (a) $T(u_1 + u_2 + u_3) = 2u_1 + 6u_2 + 2u_3$.

(b) $M_U(T) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\2 & 3 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

(c) $M_W(T) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 3 & 3\end{pmatrix}$, avec $W = (w_1, w_2, w_3)$.

(d) Une base de $\mathrm{Ker}(T)$ est donnée par

$$\{u_1 - u_2 + u_3\}.$$

En particulier, $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

Exercice 3.18. (a) Le vecteur $u_3 = (1, 0, 0)^\sim$ convient. Pour cette base, on a alors

$$\Phi_U(Tu_1) = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_U(Tu_2) = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

(b) On a

$$E = \left\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} \right\langle.$$

Il s'agit donc d'un espace vectoriel de dimension 2.

(c) Il suffit de prendre un vecteur $w \in \mathbb{R}^3 \setminus E$. Par exemple, $w = (1, 1, 1)^\sim$ convient.

(d) On a

$$M_U(T) = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -1 & \frac{11}{2}\\\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2}\\\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Une base de $\mathrm{Ker}(T)$ est alors donnée par

$$\{3u_1 - u_2 - u_3\}.$$

Exercice 3.19. (a) L'application T est bien définie, dans le sens où le reste de la division est un polynôme de degré strictement plus petit que $\deg B = n + 1$. Pour la linéarité, elle résulte des propriétés des opérations sur les polynômes et de l'unicité du quotient et du reste obtenu lors de la division.

(b) Pour montrer que A et B sont premiers entre eux, utiliser le théorème de Bézout ainsi que la surjectivité de T. Pour la réciproque, il suffit de montrer que T est injectif en utilisant la caractérisation par le noyau.

Exercice 3.20. (a) Partie libre : il faut vérifier que tout sous-ensemble fini de $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une partie libre, ce qui se déduit facilement du fait que tous les polynômes d'un tel sous-ensemble sont de degrés différents.

Partie génératrice : pour un polynôme P de degré k, expliquer comment l'exprimer comme combinaison linéaire de $P_k, \ldots, P_0$.

(b) <u>*Suggestion :*</u> Pour le noyau, regarder le coefficient dominant de ΔP et en déduire quels sont les polynômes tels que $\Delta P = 0$. Pour l'image, montrer qu'on peut construire une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et conclure avec le point (a).
<u>*Solution :*</u> La linéarité découle directement des propriétés des opérations sur les polynômes et de la linéarité de l'opération d'évaluation d'un polynôme en x. On a

$$\mathrm{Ker}(\Delta) = \{P \in \mathbb{R}[x] : P(x) = c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{R}[x].$$

(c) <u>*Suggestion :*</u> Poser $E = \{P \in \mathbb{R}[x] : P(0) = 0\}$, et montrer qu'il s'agit d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\Delta)$ dans $\mathbb{R}[x]$. En déduire que la restriction de Δ à E est un isomorphisme. L'existence et l'unicité de la suite $(H_n)_n$ peut alors être déduite de cette observation, par récurrence.
Pour montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}[x]$, calculer le degré de H_n pour tout n et utiliser le point (a).

(d) Utiliser dans un premier temps le fait que $(H_n)_n$ est une base de $\mathbb{R}[x]$. Calculer ensuite $\Delta^n P$ en utilisant le point précédent pour montrer que les coefficients de la décomposition de P dans la base $(H_n)_n$ sont effectivement les $(\Delta^n P)(0)$.

(e) Procéder par récurrencer et/ou utiliser le binôme de Newton pour calculer $\Delta^n P$ de façon générale, puis évaluer en 0.

(f) Il suffit de vérifier que les H_n donnés vérifient les conditions du point (c). On peut alors conclure par unicité.

(g) <u>*Suggestion :*</u> Commencer par montrer l'équivalence des trois premières assertions :
- ⋆ <u>(i)⇒(ii) :</u> Évident.
- ⋆ <u>(ii)⇒(iii) :</u> Utiliser le point (c) et le calcul de $(\Delta^n P)(0)$.
- ⋆ <u>(iii)⇒(i) :</u> A nouveau, utiliser (c) pour montrer que $P(x) \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

Montrer ensuite que (iv) est équivalent à (i) :
- ⋆ <u>(i)⇒(iv) :</u> Évident.
- ⋆ <u>(iv)⇒(i) :</u> Montrer que cela implique que Q prend des valeurs entières sur $\{0, \dots, p\}$ pour un polynôme Q "bien choisi", et utiliser l'équivalence des trois premiers points pour conclure.

4 Opérateurs linéaires II

Exercice 4.6. Condition nécessaire : démonstration classique de l'inclusion d'un ensemble dans un autre ($A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$).
Condition suffisante : montrer que $(g \circ f)(x) = 0$ pour tout $x \in E$.

Exercice 4.7. Pour démontrer les deux inclusions, on procède de façon classique en utilisant les définitions d'image et noyau. Pour l'exemple, on peut trouver une application $T \neq 0$ telle que $T^2 = 0$ pour que la première inclusion soit stricte. Ainsi, l'application $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (y, 0)$ est telle que $\mathrm{Ker}(T) \subsetneq \mathrm{Ker}(T^2)$.

Exercice 4.8. Il suffit de trouver une matrice $A \in \mathbb{R}^3_3$ telle que $A^2 = A \Leftrightarrow A^2 - A = 0$. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

convient. Il suffit alors de considérer $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto Ax$.

Exercice 4.9. Il suffit de trouver une matrice $A \in \mathbb{R}^4_4$ de rang 2. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

convient. Il suffit alors de considérer $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : x \mapsto Ax$.

Exercice 4.10. *Méthode 1 :* Montrer que si $x \in \mathrm{Ker}(T), y \in \mathrm{Ker}(T - \mathrm{id}), z \in \mathrm{Ker}(T + \mathrm{id})$ sont tels que $x + y + z = 0$, alors $x = y = z = 0$ en utilisant les définitions des différents noyaux.
Méthode 2 : Commencer par montrer que $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{id})$ sont en somme directe. Montrer ensuite que $\mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(T + \mathrm{id})$ le sont également. Pour cette seconde partie, penser que si

$$x \in (\mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T - \mathrm{id})) \cap \mathrm{Ker}(T + \mathrm{id}),$$

d'une part $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(T)$ et $z \in \mathrm{Ker}(T - \mathrm{id})$, et d'autre part $Tx + x = 0$. Il reste alors à jongler avec ces différentes égalités, ainsi qu'avec les hypothèses sur y et z pour conclure que $x = 0$.

Exercice 4.11. *Suggestion :* La première égalité peut se montrer par double inclusion. Pour $\subseteq$, penser à décomposer x comme $\frac{x}{2} + \frac{x}{2}$.
Pour la seconde égalité, il faut montrer d'une part que $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{id})) \cap \mathrm{Ker}(T + \mathrm{id}) = \{0\}$, et d'autre part l'égalité des ensembles. Pour cette seconde étape, raisonner en termes de dimensions permet de conclure rapidement (se rappeler de l'Exercice 4.4).
Enfin, la réciproque peut être démontrée par analyse-synthèse.

Exercice 4.12. (a) Découle de la dépendance linéaire.

(b) Si $y = \alpha x$, trouver une autre relation de la forme $y = \beta x$ et faisant intervenir λ_x et λ_y, puis conclure en comparant α et β.

(c) Procéder par l'absurde : que se passerait-il si $\lambda_x \neq \lambda_y$?
Suggestion : Calculer $T(x+y)$ de deux façons différentes, puis conclure par indépendance linéaire de x et y.

(d) Découle des deux points précédents.

5 Diagonalisation I

Exercice 5.7. La matrice est diagonalisable. On a

$$S^{-1}AS = \operatorname{diag}(0,4,6,6), \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il vient

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}\cdot 3^n + 4^{n-1} & 2^{n-1}\cdot 3^n - 4^{n-1} & -4^{n-1} & -4^{n-1} \\ 2^{n-1}\cdot 3^n - 4^{n-1} & 2^{n-1}\cdot 3^n + 4^{n-1} & 4^{n-1} & 4^{n-1} \\ -4^{n-1} & 4^{n-1} & 2^{n-1}\cdot 3^n + 4^{n-1} & -2^{n-1}\cdot 3^n + 4^{n-1} \\ -4^{n-1} & 4^{n-1} & -2^{n-1}\cdot 3^n + 4^{n-1} & 2^{n-1}\cdot 3^n + 4^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.8. La matrice A n'est pas diagonalisable, mais la matrice B oui. On a

$$S^{-1}BS = \operatorname{diag}(2,2,3,3), \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.9. (a) Faux : Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

(b) Faux : Par exemple, ce n'est pas le cas des matrices diagonales

$$A = \operatorname{diag}(0,1,-1) \quad \text{et} \quad B = \operatorname{diag}(0,2,-2).$$

(c) Faux : Par exemple, ce n'est pas le cas des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Vrai : S'il existe S inversible tel que $S^{-1}AS$ est diagonale, alors $S^{-1}A^2S = (S^{-1}AS)^2$ est aussi diagonale, et A^2 est donc diagonalisable par définition.

(e) Vrai : Il suffit de vérifier que, si $a,b,c,d \in \mathbb{C}$,

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc),$$

ce qui correspond bien au résultat annoncé.

(f) Vrai : Si S diagonalise A et B, alors

$$AB = S(S^{-1}AS)(S^{-1}BS)S^{-1} = S(S^{-1}BS)(S^{-1}AS)S^{-1} = BA,$$

car $S^{-1}AS$ et $S^{-1}BS$ commutent (puisque ce sont des matrices diagonales).

(g) Vrai : A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow 0$ n'est pas valeur propre, la dernière équivalence provenant du fait que $\det A$ est égal au produit des valeurs propres de A.

(h) Faux : Contre exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dont les valeurs propres sont } 0, 1+i \text{ et } 1-i.$$

Exercice 5.10. Oui : puisque $A \in \mathbb{R}^5_5$, A possède exactement 5 valeurs propres et, si z est valeur propre, $\overline{z}$ aussi. Ses valeurs propres sont donc $2, 1+i, 1-i, 3-i, 3+i$.

Exercice 5.11. La matrice M est diagonalisable si et seulement si $\alpha = 0$. Dans ce cas, on a

$$S^{-1}MS = \operatorname{diag}(1,1,-1,-1), \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta & -\gamma \\ 0 & 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.12. (a) On a $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-6)^2(\lambda-9)$. Donc, 6 et 9 sont les valeurs propres de A, de multiplicités algébriques 2 et 1 respectivement.

(b) A est diagonalisable $\Leftrightarrow \alpha = 0$.

(c) Pour $\alpha = 0$, on a

$$S^{-1}MS = \operatorname{diag}(6,6,9), \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.13. (a) M n'a que des valeurs propres simples $\Leftrightarrow \phi \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$.

(b) M est diagonalisable $\Leftrightarrow \phi \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$.

(c) x est vecteur propre pour $\phi = \frac{1}{2}$. Pour y, on tombe sur une contradiction quant à la valeur propre qui lui serait associée.

Exercice 5.14. (a) Il suffit de remarquer que les matrices correspondantes ont le même polynôme caractéristique.

(b) A possède une unique valeur propre $\Leftrightarrow \alpha = 1$. Dans ce cas, la matrice n'est pas diagonalisable.

(c) A est diagonalisable, et on a

$$S^{-1}AS = \operatorname{diag}(1,1,3,3), \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) En appliquant la suggestion, on peut exprimer u comme le vecteur $(1,-1,1,2)^\sim$ dans la base de vecteurs propres trouvée au point précédent, et alors considérer $(\operatorname{diag}(1,1,3,3)/3)^n$, ce qui simplifie le calcul.

(e) Découle des propriétés du polynôme minimum : ce dernier possède les même zéros que le polynôme caractéristique, et ne possède que des zéros simples si et seulement si A est diagonalisable, ce qui est le cas.

Exercice 5.15. (a) La matrice est diagonalisable si et seulement si $\alpha = 2$.

(b) Pour $\alpha = 2$, on a

$$S^{-1}AS = \operatorname{diag}(0,0,2,2), \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Si on note E_0 l'espace propre associé à 0, on a

$$\dim(E_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \neq 2, \\ 2 & \text{si } \alpha = 2. \end{cases}$$

(d) Par le théorème de la dimension (vu $E_0 = \operatorname{Ker}(A)$ et $F = \operatorname{Im}(A)$), on a

$$\dim(F) = \begin{cases} 3 & \text{si } \alpha \neq 2, \\ 2 & \text{si } \alpha = 2. \end{cases}$$

(e) Dans cette base, l'endomorphisme T est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.16. *Suggestion :* Calculer le polynôme caractéristique de B en utilisant les formules de Frobenius-Schur. En déduire des informations sur les valeurs propres de B en fonction de celles de A. Pour la condition de diagonalisation, réfléchir à la valeur propre de A qui pourrait poser problème pour B au niveau de ses multiplicités algébrique et géométrique.
Solution : Un complexe λ est valeur propre de B si et seulement si λ^2 est valeur propre de A. De plus, λ a la même multiplicité géométrique comme valeur propre de B que λ^2 comme valeur propre de A. Enfin, la matrice B est diagonalisable si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A.

Exercice 5.17.
(a) On a $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2 - 1$. Pour démontrer la relation, il suffit d'utiliser la loi des mineurs de façon adéquate pour calculer $\det(xI_n - A_n)$ et conclure.

(b) On procède par récurrence sur $n \geq 1$. Attention, il y a deux cas de bases à vérifier : P_1 et P_2.

(c) *Suggestion :* Utiliser le point précédent pour déterminer les zéros de P_n.
Solution : Vu le point précédent, on trouve les n zéros de P_n : ce sont les $x_{\alpha_k} = 2\cos\alpha_k$, avec $\alpha_k = \frac{k\pi}{n+1}$, pour tout $k \in \{1\ldots, n\}$. En particulier, A_n n'a que des valeurs propres simples, et est donc diagonalisable.

6 Diagonalisation II

Exercice 6.6. Vrai : si on suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_0$ tel que $D(ax^2+bx+c) = \lambda(ax^2+bx+c)$, alors on trouve que nécessairement, $a = b = c = 0$, *i.e.* λ n'est pas valeur propre de de D. Par contre, 0 en est bien une (les polynômes constants étant les vecteurs propres associés).

Exercice 6.7. L'ensemble des valeurs propres de T est

$$\{k(k+1) : 0 \leq k \leq n\}.$$

Exercice 6.8. (a) $M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

(b) $M_{\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $\mathcal{B}' = (e_1 - e_4, e_2 - e_4, e_1 - e_2 - e_3, e_1 - e_3)$.

(c) Les valeurs propres de T sont
- 3, de multiplicité géométrique 1,
- 2, de multiplicité géométrique 2,
- 1, de multiplicité géométrique 1.

(d) On a $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^4$.

(e) Oui, vu le point précédent.

Exercice 6.9. (a) $M_U(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Les valeurs propres de T sont
- 3, de multiplicité algébrique 2 et géométrique 1,
- $1+\sqrt{2}$, de multiplicité algébrique et géométrique 1,
- $1-\sqrt{2}$, de multiplicité algébrique et géométrique 1.

(c) $M_U(T^2 - \mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 8 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de $T^2 - \mathrm{id}$ sont $8, 2+2\sqrt{2}$ et $2-2\sqrt{2}$.

(d) $M_V(T) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(e) On a $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(T) = E$, donc T est une bijection.

Exercice 6.10. *Suggestion :* En appliquant la suggestion, on trouve $T^2 = \mathrm{id}$, *i.e.* $\lambda^2 - 1$ est un polynôme annulateur de T. On peut alors facilement déterminer le polynôme minimal de T, ainsi que ses valeurs propres. Il suffit alors d'appliquer la définition de valeur/vecteur propre pour trouver les vecteurs propres associés. Une distinction en fonction de la parité de n sera nécessaire.

Solution : Les valeurs propres de T sont ± 1. Pour les vecteurs propres, deux cas sont à distinguer :

- Si n est pair, *i.e.* $n = 2p$ pour un $p \in \mathbb{N}$, alors une base de vecteurs propres est donnée par

$$\{\underbrace{x^{2p}+1, x^{2p-1}+x, \ldots, x^{p+1}+x^{p-1}, x^p}_{\text{vecteurs propres de 1}}, \underbrace{x^{2p}-1, x^{2p-1}-x, \ldots, x^{p+1}-x^{p-1}}_{\text{vecteurs propres de } -1}\}.$$

- Si n est impair, *i.e.* $n = 2p+1$ pour un $p \in \mathbb{N}$, alors une base de vecteurs propres est donnée par

$$\{\underbrace{x^{2p+1}+1, x^{2p}+x, \ldots, x^{p+1}+x^p}_{\text{vecteurs propres de 1}}, \underbrace{x^{2p+1}-1, x^{2p}-x, \ldots, x^{p+1}-x^p}_{\text{vecteurs propres de } -1}\}.$$

7 Diagonalisation et polynômes d'endomorphisme

Exercice 7.7. Les polynômes sont respectivement

$$\mathcal{M}_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_B(\lambda) = (\lambda + 1)^2.$$

Exercice 7.8. (a) Les valeurs propres sont $-1, -2$ et 1. Les espaces propres associés sont

$$E_{-1}(T) = \left\rangle \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\langle, \quad E_{-2}(T) = \left\rangle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\langle \quad \text{et} \quad E_1(T) = \left\rangle \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\langle.$$

(b) Oui.

(c) $\mathcal{M}_T(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda - 1)$.

Exercice 7.9. (a) Découle des propriétés des opérations sur les polynômes et de la linéarité de la dérivée. L'application est également bien définie ($T(P) \in \mathbb{C}_{\leq n}[z], \forall P \in \mathbb{C}_{\leq n}[z]$).

(b) $M = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \alpha & 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$, avec $\mathcal{B} = (1, z, z^2)$. Donc, $\chi_T(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - \alpha)(\lambda - \alpha^2)$.

(c) M est diagonalisable $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{C}_0 \setminus \{1\}$.

(d) $\mathcal{M}_M(\lambda) = \begin{cases} (\lambda - 1)(\lambda - \alpha)(\lambda - \alpha^2) & \text{si } \alpha \notin \{-1, 1\} \\ (\lambda - 1)(\lambda + 1) & \text{si } \alpha = -1 \\ (\lambda - 1)^3 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$

(e) On a $\mathrm{rg}T = 3$. Pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, et conclure par égalité des dimensions.

(f) Les polynômes caractéristique et minimum de T sont respectivement

$$\chi_T(\lambda) = (-\lambda)^{n-2}(1 - \lambda)(\alpha - \lambda)(\alpha^2 - \lambda)$$

$$\text{et} \quad \mathcal{M}_T(\lambda) = \begin{cases} \lambda(\lambda - 1)(\lambda - \alpha)(\lambda - \alpha^2) & \text{si } \alpha \notin \{-1, 1\} \\ \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) & \text{si } \alpha = -1 \\ \lambda(\lambda - 1)^3 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}.$$

Exercice 7.10. Commencer par montrer que $\chi_T = \mathcal{M}_T$ si et seulement si $\deg(\chi_T) = \deg(\mathcal{M}_T) = n$. Procéder ensuite par l'absurde en supposant que $\deg(\mathcal{M}_T) < n$, et établir une contradiction par rapport à l'indépendance linéaire de $x, Tx, \ldots, T^{n-1}x$ en utilisant les propriétés du polynôme minimum.

Exercice 7.11. Il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, le théorème de la dimension permet alors de conclure. Pour la première partie, déduire la forme de P en fonction des conditions imposées par l'énoncé, et regarder ce que vaut $P(T)(x)$ pour un x "bien choisi".

Exercice 7.12. La condition nécessaire est évidente. Pour la réciproque, partir du fait que M^p annule un polynôme P ne possédant que des racines simples, et factoriser $P(z^p)$. L'égalité des noyaux s'obtient par l'intermédiaire de l'égalité des noyaux des matrices diagonales correspondantes.

Exercice 7.13. Suggestion : Le polynôme caractéristique peut facilement être calculé à partir de la représentation matricielle de S. Pour le polynôme minimum, regarder comment se comporte le degré du polynôme $(S - \mathrm{id})^d(z^n)$ en fonction de $d \in \{0 \ldots, n\}$ ($S - \mathrm{id}$ venant de l'expression du polynôme caractéristique). En particulier, montrer que $(S - \mathrm{id})^n(z^n) \neq 0$, et en déduire le polynôme minimal.
Solution : Les polynômes caractéristique et minimum de S sont respectivement

$$\chi_S(\lambda) = (1 - \lambda)^{n+1} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_S(\lambda - 1) = \lambda^{n+1}.$$

Exercice 7.14. Suggestion : Supposer que B est diagonalisable, et regarder les conditions que doit nécessairement satisfaire A. Trouver à quoi ressemble la matrice $P(B)$, où P est le polynôme minimum de B, et en tirer des infos sur $P(A)$. Utiliser le théorème de Bézout pour conclure.
Solution : Seule la matrice nulle convient.