Université de Liège

Année académique 2024 – 2025

Algèbre linéaire

Bloc 1 – Sciences Mathématiques

Bloc 2 – Sciences Physiques

Titulaire : Michel Rigo
m.rigo@uliege.be

Assistant : Antoine Renard
antoine.renard@uliege.be

0 Espaces vectoriels

0.1 *Rappels* [1]

Définition 0.1 (VII.1.1, p. 121, version 2009-2010)**.** Soit $\mathbb{K}$ un champ dont le neutre pour l'addition est 0 et le neutre pour la multiplication est 1. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés ***scalaires***. Un ***espace vectoriel*** sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$***-vectoriel*** est un ensemble E muni d'une opération binaire interne

$$+ : E \times E \to E$$

et d'une opération interne

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$$

qui jouissent des propriétés suivantes :

(1) $(E, +)$ est un groupe commutatif,

(2) pour tous $x, y \in E$ et tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

- (2.1) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$, *i.e.* l'opération $\cdot$ est associative par rapport aux scalaires,
- (2.2) $1 \cdot x = x$, *i.e.* il existe un neutre pour l'opération $\cdot$,
- (2.3) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$, *i.e.* l'opération $\cdot$ est distributive par rapport aux scalaires,
- (2.4) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$, *i.e.* l'opération $\cdot$ est distributive par rapport aux vecteurs.

Définition 0.2 (VII.3.1, p. 126, version 2009-2010)**.** Soit E un espace vectoriel. Une partie finie $A \subset E$ est dite ***libre*** si les vecteurs de A sont linéairement indépendants [2]. Dans le cas contraire, A est dite ***liée***. La partie A est dite ***génératrice*** si tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de A. Si $x_1, \ldots, x_p$ est une partie génératrice de E, on dit aussi que E est ***engendré*** par $x_1, \ldots, x_p$ et on note $E = \rangle x_1, \ldots, x_p \langle$.

Définition 0.3 (VII.3.4 et 3.7, p. 127-128, version 2009-2010)**.** Un espace vectoriel E est dit de ***dimension finie*** s'il contient une partie génératrice finie.
Une ***base*** de E est une partie libre et génératrice de E. La ***dimension*** de E est alors le nombre d'éléments d'une base de E, et est notée $\dim E$.

Définition 0.4 (VII.5.1, p. 133, version 2009-2010)**.** Soit E un espace vectoriel. Un sous-ensemble non vide $F \subset E$ est un ***sous-espace vectoriel*** de E s'il contient les combinaisons linéaires de ses éléments.

1. Définitions et propositions tirées des notes du cours d'Algèbre linéaire, version 2009–2010, dispensé par Michel Rigo.
2. Pour rappel, des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ sont ***linéairement indépendants*** si, pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$,

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$$

.

Proposition 0.5 (VII.5.2, p. 133, version 2009-2010)**.** *Soit E un espace vectoriel sur le champ $\mathbb{K}$. Un sous-ensemble $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, les assertions suivantes sont vérifiées :*

(1) $0 \in F$,

(2) si $x, y \in F$, alors $x + y \in F$,

(3) si $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x \in F$.

Proposition 0.6 (VII.5.5, p. 134, version 2009-2010)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie, inférieure ou égale à n. De plus, si $\dim(F) = n$, alors $F = E$.*

Proposition 0.7 (VII.5.7, p. 135, version 2009-2010)**.** *Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E et soit*

$$H = \{f + g \mid f \in F, g \in G\}.$$

Alors H est un sous-espace vectoriel de E. Ce sous-espace H est appelé la somme de F et G et se note $F + G$.

Théorème 0.8 (VII.5.15, p. 137, version 2009-2010)**.** *Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, alors*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Définition 0.9 (VII.5.16, p. 138, version 2009-2010)**.** On dit que la somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est ***directe*** si $F \cap G = \{0\}$. Auquel cas, on écrit $F \oplus G$.

0.2 *Exercices au tableau*

Exercice 0.1. Considérons le $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Définissons les polynômes

$$P_1(X) = X, \quad P_2(X) = 2X + 1 \quad \text{et} \quad P_3(X) = X^2 + 2X + 2.$$

(a) Démontrer que les polynômes P_1, P_2, P_3 forment une base de $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$.

(b) Déterminer les composantes des polynômes Q_1, Q_2, Q_3 dans cette base si

$$Q_1(X) = 1, \quad Q_2(X) = X \quad \text{et} \quad Q_3(X) = X^2.$$

(c) Écrire en général les formules de changement de base établissant le lien entre les composantes des polynômes de $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ dans ces deux bases.

Exercice 0.2. Soient

$$\begin{aligned} & L = \{p \in \mathbb{C}_{\leq 2}[z] : \forall z \in \mathbb{C}_0, z^2 p\left(\frac{1}{z}\right) = p(z)\} \\ \text{et} \quad & M = \{p \in \mathbb{C}_{\leq 2}[z] : \forall z \in \mathbb{C}, p(z+1) = p(-z)\}, \end{aligned}$$

où $\mathbb{C}_{\leq 2}[z]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

(a) Montrer que L et M sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_{\leq 2}[z]$.

(b) Déterminer une base et la dimension de L, M, $L \cap M$ et $L + M$.

Exercice 0.3. Soit $F \subseteq \mathbb{R}^4$ le sous-espace vectoriel des solutions du système homogène suivant :

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ 3y - z + 2t = 0 \end{cases}.$$

Donner une base de F et en déduire une base d'un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 0.4 (Calcul matriciel, Examen Juin 2023)**.** Soit $E = \mathbb{C}^2_3$ le $\mathbb{C}$-vectoriel des matrices complexes 2×3. On considère les sous-vectoriels de E

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}, \quad G = \left\{ A \in \mathbb{C}^2_3 \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$H = \left\{ A \in \mathbb{C}^2_3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Donner une base de F.

(b) Donner une base de H.

(c) Donner une base de $F \cap G$.

(d) Les sous-espaces F et H sont-ils en somme directe ? Justifier. En particulier, a-t-on $F \oplus H = \mathbb{C}^2_3$?

(e) ***Déduire*** des points précédents si les espaces $F \cap G$ et H sont ou non en somme directe. En particulier, a-t-on $(F \cap G) \oplus H = \mathbb{C}^2_3$?

0.3 *Exercices en autonomie*

Exercice 0.5. Considérons le $\mathbb{C}$-vectoriel $E_\mathbb{C} = \mathbb{C}^3$.

(a) Dans $E_\mathbb{C}$, les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3i \\ -14 \\ 7i \end{pmatrix}$$

sont-ils linéairement indépendants ?

(b) Montrer que $E_\mathbb{C}$ peut être considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(c) Considérons le $\mathbb{R}$-vectoriel $E_\mathbb{R} = \mathbb{C}^3$. Les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont-ils linéairement indépendants dans $E_\mathbb{R}$?

(d) Quelle est la dimension de $E_\mathbb{C}$? Et celle de $E_\mathbb{R}$?

Exercice 0.6. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. On définit les ensembles

$$F = \{X \in \mathbb{R}^2_2 : AX = 0\}, \quad G = \{X \in \mathbb{R}^2_2 : XA = 0\} \quad \text{et} \quad H = \{X \in \mathbb{R}^2_2 : AX = XA\}.$$

(a) Démontrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2_2$. Donner ensuite une base et la dimension de chaque sous-espace.

(b) Décrire $F \cap G$, $F \cap H$ et $G \cap H$. Démontrer que ces trois ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2_2$. Donner ensuite une base et la dimension de chaque sous-espace.

Exercice 0.7 (Calcul matriciel, Examen Janvier 2021)**.** On considère le $\mathbb{C}$-vectoriel E des polynômes à coefficients complexes de degré au plus 4 et le sous-ensemble F suivant

$$F = \{az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}.$$

(a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Donner une base de F et décomposer $2z^4 - z^3 - z + 2$ dans celle-ci.

(c) Quelle est l'intersection de F avec l'enveloppe linéaire

$$G = \rangle z^4 + 1, z^3 + 1, z^2 + 1 \langle \ ?$$

En déduire la dimension de $F + G$.

(d) Donner une base d'un supplémentaire de F dans E.

Exercice 0.8 (Calcul matriciel, Examen Janvier 2023)**.** On considère le $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}^4$.

(a) Soit F l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3, x_4)^\sim \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{et} \quad 2x_1 - x_3 = 0.$$

Justifier que F est un sous-espace vectoriel. Quelle en est la dimension ?

(b) Soit le sous-vectoriel

$$G = \left\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\langle .$$

Donner une base de G.

(c) Donner une base de $F \cap G$. En déduire la dimension de $F + G$.

(d) Donner un vecteur n'appartenant **pas** à $F + G$. Pouvez-vous trouver 2 tels vecteurs linéairement indépendants n'appartenant pas à $\overline{F + G}$? Justifier.

(e) L'ensemble H formé des $(x_1, x_2, x_3, x_4)^\sim \in \mathbb{R}^4$ tels que $x_1^2 - x_2^2 = 0$ est-il un sous-espace vectoriel ? Argumenter votre réponse.

Exercice 0.9. Soient A et B les parties de $\mathbb{R}^4$ définies par

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_3 = x_4^2 + 1 \end{array} \right. \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soient F et G les sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par A et B. Démontrer que $F = G$.

Exercice 0.10 (Calcul matriciel, Partiel Janvier 2014)**.** On se place dans $\mathbb{R}^4$ considéré comme $\mathbb{R}$-vectoriel. On considère l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_4 = 0 \right\}$$

et le sous-espace vectoriel

$$G = \left\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\langle .$$

(a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel et en donner une base.

(b) F et G sont-ils en somme directe ?

(c) Trouver un supplémentaire de $F + G$.

(d) Soit H le sous-espace vectoriel dont une base est donnée par

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Donner une base de $H \cap F$ et une base de $H + F$.

Exercice 0.11. Soient

$$H_n = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^* = A\} \quad \text{et} \quad U_n = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^* = -A\}.$$

Démontrer, si possible, que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_n^n$ et qu'on a $\mathbb{C}_n^n = H_n \oplus U_n$ lorsque $\mathbb{C}_n^n$ est vu d'abord comme un $\mathbb{C}$-vectoriel, puis comme un $\mathbb{R}$-vectoriel.

Exercice 0.12. Considérons $\mathbb{C}_n^n$ comme un $\mathbb{C}$-vectoriel. Soient

$$S_n = \{A \in \mathbb{C}_n^n : \widetilde{A} = A\} \quad \text{et} \quad A_n = \{A \in \mathbb{C}_n^n : \widetilde{A} = -A\}.$$

Démontrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_n^n$ et qu'on a $\mathbb{C}_n^n = S_n \oplus A_n$.

Exercice 0.13. Considérons le $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$.

(a) Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, les polynômes 1, $X - a$, $(X - a)^2$ et $(X - a)^3$ forment une base de $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$. Dans la suite, nous noterons $\mathcal{B}$ cette base.

(b) Rechercher les composantes d'un élément quelconque dans $\mathcal{B}$.

(c) Écrire la formule de changement de base de la base $\mathcal{B}' = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 0.14. Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient

$$P = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad I = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Démontrer que $E = P \oplus I$.

Exercice 0.15. On considère $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(a) À quelle(s) condition(s) sur $z \in \mathbb{C}$ les éléments 1 et z sont-ils linéairement dépendants sur $\mathbb{R}$?

(b) À quelle(s) condition(s) sur $z \in \mathbb{C}_0$ les éléments $\frac{1}{z}$ et 1 sont-ils linéairement dépendants sur $\mathbb{R}$?

(c) Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, les éléments $1, z$ et z^2 sont toujours linéairement dépendants sur $\mathbb{R}$, et trouver une relation linéaire entre eux.

Exercice 0.16. Soit $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ une base d'un espace vectoriel E sur le champ $\mathbb{K}$.

(a) Démontrer que les vecteurs

$$y_1 = x_1,\ y_2 = x_1 + x_2, \ldots,\ y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

forment une base $\mathcal{B}'$ de E.

(b) Établir la formule de changement de base permettant de passer de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

1 Polynômes de $\mathbb{C}[z]$

1.1 ***Exercices au tableau***

Exercice 1.1 (Interrogation – 5 Mars 2007). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^3 - 7x^2 - 28x + 160 = 0$$

sachant qu'elle admet une solution négative ainsi que deux solutions positives dont l'une est le double de l'autre.

Exercice 1.2. Chercher les zéros complexes du polynôme

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 12$$

sachant qu'il possède un zéro imaginaire pur.

Exercice 1.3 (Examen Juin 2012). Le polynôme $z^9 + 2z^5 + 3z^4 + 5z^2 + 6z + 7$ possède-t-il un zéro de module supérieur à 9 ?

Exercice 1.4. Quels sont les polynômes P de degré au plus égal à 5 tels que $P + 10$ soit divisible par $(z+2)^3$ et $P - 10$ soit divisible par $(z-2)^3$?

Exercice 1.5. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et soit $P \in \mathbb{C}[z]$ défini par

$$P(z) = z^5 + 2z^4 + 6z^3 + az^2 + bz + c.$$

A quelle(s) condition(s) sur les paramètres a, b et c le polynôme P est-il divisible par

(a) $z(z-1)$?

(b) $(z-1)^2$?

Exercice 1.6. Démontrer que $z^{104} + z^{93} + z^{82} + z^{71} + 1$ est divisible par $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

Exercice 1.7. Déterminer des polynômes U et V tels que $(z^7 - z - 1)\,U + (z^5 + 1)\,V = 1$.

1.2 ***Exercices en autonomie***

Exercice 1.8. Dans $\mathbb{C}[z]$, écrire les polynômes suivants sous la forme de Taylor :

(a) $3z^4 - 2z^2 - 3$, en le point $z_0 = -1$,

(b) $2z^3 - 6z^2 + 3z + 5$, en le point $z_0 = 2$.

Exercice 1.9. Sachant que le polynôme de $\mathbb{C}[z]$

$$z^4 + z^3 - 5z^2 + z - 6$$

possède un zéro réel et un zéro imaginaire pur, déterminer tous ses zéros.

Exercice 1.10 ($\star$). Chercher les zéros du polynômes de $\mathbb{C}[z]$

$$z^3 + 3z^2 + (9 - 4i)z + 15$$

sachant qu'il possède un zéro imaginaire pur.

Exercice 1.11 (Examen Mai 2021). Expliquer pourquoi les zéros du polynôme

$$5z^6 + (1 + 2i)z^4 + (4 - 3i)z^3 + 3z^2 - 2$$

ont tous un module inférieur ou égal à 2.

Exercice 1.12. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et soit $P \in \mathbb{C}[z]$ défini par

$$P(z) = z^5 + 2z^4 + 6z^3 + az^2 + bz + c.$$

A quelle(s) condition(s) sur les paramètres a, b et c le polynôme P est-il divisible par

(a) $z^2 + 1$?

(b) $(z+1)^3$?

Exercice 1.13. Effectuer les divisions euclidiennes

(a) de $z^5 + 2z^4 - z^3 + 22z$ par $z^2 - 4z + 1$,

(b) de $z^4 + 5z^3 + 12z^2 + 19z - 7$ par $z^2 + 3z - 1$.

Exercice 1.14. Calculer un pgcd D de $z^6 - 7z^4 + 8z^3 - 7z + 7$ et $3z^5 - 7z^3 + 3z^2 - 7$. En déduire des polynômes U et V tels que

$$(z^6 - 7z^4 + 8z^3 - 7z + 7)U + (3z^5 - 7z^3 + 3z^2 - 7)V = D.$$

Exercice 1.15 (Examen Mai 2024)**.** Vérifier que les polynômes suivants sont premiers entre eux

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 \quad \text{et} \quad Q(x) = 2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3.$$

Exercice 1.16. Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

(a) (Examen Août 2024) Dans l'ensemble des polynômes réels de degré 2, le polynôme $P(x) = 2x^2 - 4x + 1$ est le seul dont le grapique contient les 2 points de coordonnées $(-1, 7)$ et $(3, 7)$.

(b) (Examen Mai 2024) Un polynôme de degré 4 à coefficients complexes peut avoir exactement 2 zéros distincts.

(c) (Examen Août 2023) Dans un plan muni d'un repère orthonormé, par 3 points non alignés de coordonnées (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3) avec $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ passe une et une seule parabole d'axe de symétrie vertical.

(d) (Examen Août 2021) Soit $P(z)$ un polynôme de degré au moins 2. Le polynôme P et sa dérivée $D_z P$ sont toujours premiers entre eux.

(e) (Examen Août 2021) Soient z_0 un nombre complexe et $P(z)$ un polynôme de degré au moins 2. Il existe un entier $j > 0$ tel que $(D_z^j P)(z_0) \neq 0$.

(f) (Examen Mai 2021) Un polynôme $P \in \mathbb{R}[z]$ de degré 17 possède toujours un zéro réel.

Exercice 1.17 ($\star$)**.** Soit $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$. Démontrer que 1 est un zéro triple du polynôme

$$z^{2n} - nz^{n+1} + nz^{n-1} - 1.$$

Exercice 1.18 ($\star$)**.** Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$. Calculer le reste de la division de $(\sin(a) - z\cos(a))^n$ par $z^2 + 1$.

Exercice 1.19 ($\star$ – Interrogation – 18 Février 2013)**.** Soit $n \geq 2$ un entier. Factoriser $z^n - 1$ dans $\mathbb{C}$. En déduire que $z^n - 1$ et $D_z(z^n - 1)$ n'ont pas de zéro commun. Déterminer la valeur du produit suivant

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{2ik\pi/n}.$$

2 Fractions rationnelles

2.1 *Exercices au tableau*

Exercice 2.1. Décomposer en fractions rationnelles simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle

$$\frac{(2-i)z^3+(3+4i)z^2-(4-5i)z-(1+4i)}{(z+i)^3(z-1)}.$$

Exercice 2.2. Décomposer en fractions rationnelles simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles

$$R_1(z)=\frac{z^3+3z^2-11z+12}{(z^2+1)(z-2)^2},\quad R_2(z)=\frac{1}{z(z^4+1)}\quad \text{et}\quad R_3(z)=\frac{z^5+1}{z^3(z^2+1)}.$$

Exercice 2.3 (Interrogation – 28 Février 2005)**.** Soit $a\in\mathbb{R}$. Décomposer en fractions rationnelles simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle

$$\frac{z^5}{(z^2+a)^2}.$$

Exercice 2.4. Décomposer en fractions rationnelles simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n)}$$

pour tout $n\in\mathbb{N}_0$.

2.2 *Exercices en autonomie*

Exercice 2.5. Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

(a) (Examen Août 2023) Les fractions $1/(z^3-3z-2)$ et $(-3z^2+3)/(z^3-3z-2)^2$ possèdent les mêmes pôles.

(b) (Examen Mai 2023) La fraction $1/(z^3-3z-2)$ possède le même développement en fractions simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

(c) (Examen Mai 2022) La fraction
$$\frac{1}{(z^2+4)(z-2)^3}$$
possède les mêmes décompositions en fractions simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

(d) (Examen Mai 2022) On peut trouver une fraction rationnelle $R(z)$ telle que $1+i$ est un pôle de R mais pas de D_zR.

Exercice 2.6. Décomposer en fractions simples sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{C}$, les fractions rationnelles suivantes :

$$R_1(z)=\frac{1}{z^3-z},\quad R_2(z)=\frac{z^4+1}{(z+1)^2(z^2+1)}\quad \text{et}\quad R_3(z)=\frac{z^2+3z+1}{(z-1)^2(z-2)}.$$

Exercice 2.7 (Examen Juin 2019)**.** Décomposer en fractions simples sur $\mathbb{R}$, **puis sur** $\mathbb{C}$, la fraction rationnelle suivante

$$\frac{4z^3+13z^2+14z+13}{z^4+2z^3+4z^2+6z+3}.$$

Suggestion : le dénominateur possède un zéro réel et deux zéros dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Exercice 2.8 (Examen Septembre 2021)**.** Décomposer en fractions simples sur $\mathbb{R}$, **puis sur** $\mathbb{C}$, la fraction rationnelle suivante

$$\frac{-x^3+7x^2-5x+7}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

Exercice 2.9 (Examen Mai 2022)**.** Sachant que $x^4-4x^3-2x^2+12x+9=(x-3)^2(x+1)^2$. Exprimer la fraction rationnelle suivante

$$\frac{3x^6-12x^5-5x^4+38x^3+15x^2-2x+27}{x^4-4x^3-2x^2+12x+9}$$

comme somme d'un polynôme et d'une fraction rationnelle propre que l'on décomposera ensuite en fractions simples (sur $\mathbb{R}$). Donner la forme de cette décomposition avec des constantes indéterminées puis, fournir un système permettant de déterminer ces constantes. On ne demande **pas** de le résoudre.

Exercice 2.10 ($\star$)**.** Décomposer en fractions rationnelles simples sur $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles

$$R_{m,n}(z)\frac{z^m}{(z-1)^n} \quad \text{et} \quad R_n(z)=\frac{z^{n-1}}{z^n-1},$$

pour tout $m,n\in\mathbb{N}_0$.

3 Opérateurs linéaires I

3.1 *Exercices au tableau*

Exercice 3.1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier.

(a) $T_1 \colon \mathbb{R}^2 \to [-1,1] : (x,y) \mapsto \sin(x+y)$.

(b) $T_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto (x+2y,-z)$.

(c) $T_3 \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : (x,y) \mapsto (\overline{x+y}, x+iy)$, où $\mathbb{C}^2$ est vu comme $\mathbb{R}$-vectoriel.

Exercice 3.2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que l'application

$$U \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

est linéaire et qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Exercice 3.3. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'application $T \colon \mathbb{C}_{\leq 3}[z] \to \mathbb{C}^3_3 : P \mapsto P(M)$ est linéaire. Donner des bases des image et noyau.

Exercice 3.4. On pose $P_0(z) = z^2 + z,\ P_1(z) = z^2 + 1,\ P_2(z) = z + 1$.

(a) Montrer que P_0, P_1, P_2 forment une base de $\mathbb{C}_{\leq 2}[z]$ et donner les composantes de $az^2 + bz + c$ dans cette base.

(b) On définit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_{\leq 2}[z], \mathbb{C})$ par $TP_0 = TP_1 = TP_2 = 2$. Quelle est l'image de $az^2 + bz + c$?

(c) Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$ et montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

$$\mathrm{Ker}(T) = \{P \in \mathbb{C}_{\leq 2}[z] \colon P(z_0) = 0\}.$$

Exercice 3.5. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme T de $\mathbb{R}^4$ tel que, si (e_1, e_2, e_3, e_4) désigne la base canonique, on a

$$\begin{cases} T(e_1) = e_1 - e_2 + e_3 \\ T(2e_1 + 3e_4) = e_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(T) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\}.$$

Exercice 3.6. Pour tout $P \in \mathbb{C}_{\leq 3}[z]$, on pose

$$f(P) = P(1-z) + P(1) - P(z) \quad \text{et} \quad g(P) = \frac{1}{4!} D_z^3(P(z^2)) - zD_zP(z) + z^3 P\left(\frac{1}{z}\right).$$

(a) Montrer que $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_{\leq 3}[z])$.

(b) Donner les matrices qui représentent f et g dans la base canonique. En déduire les matrices qui représentent $f \circ g$ et $g \circ f$.

(c) Soit $Q(z) = z(1-z)$. Calculer $(f \circ g)(Q)$ et $(g \circ f)(Q)$.

(d) Donner des bases des noyaux et images de $f \circ g$ et $g \circ f$.

(e) A-t-on $\mathrm{rg}(f \circ g) = \mathrm{rg}(g \circ f)$?

Exercice 3.7. Pour tout $P \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$, on pose

$$f(P) = \begin{pmatrix} P(1) \\ (D_xP)(1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(P) = P + (x-1)D_xP - P(1).$$

(a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{\leq 3}[x], \mathbb{R}^2)$ et que $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{\leq 3}[x])$.

(b) Donner leurs représentations matricielles dans les bases canoniques

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Soit la base $\mathcal{B}' = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ de $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$. Donner les matrices de changement de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. En déduire les matrices représentant f et g dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$.

(d) Donner des bases de $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer g^n.

3.2 *Exercices en autonomie*

Exercice 3.8. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier.

(a) $T_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

(b) $T_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x + y, x - y, 1)$.

(c) $T_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x + y, x - y, 0)$.

Exercice 3.9. Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $T \colon \mathbb{C}^2_2 \to \mathbb{C}^2_2 : A \mapsto AM - MA$.

(a) Montrer que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2_2)$.

(b) Donner la matrice qui représente T dans la base canonique.

(c) Trouver des bases et les dimensions des noyau et image.

Exercice 3.10. On considère l'endomorphisme

$$T \colon \mathbb{C}_{\leq 3}[z] \to \mathbb{C}_{\leq 3}[z] : P(z) \mapsto D_z\left((1 - z^2) D_z P(z)\right) + 6P(z).$$

Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$.

Exercice 3.11. Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = t\}.$$

Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

Exercice 3.12 (Examen Août 2024 – Reformulé)**.** Soit T un endomorphisme d'un espace de dimension 3 représenté, dans une certaine base, par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la dimension du noyau de T ?

Exercice 3.13. Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

(a) (Examen Août 2021) Soit T une application linéaire. Si $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathrm{Ker}(T))$, alors T est injective.

(b) (Examen Août 2023) Soit A une matrice de $\mathbb{C}^3_4$ de rang 2. Il existe deux vecteurs linéairement indépendants x, y de $\mathbb{C}^4$ tels que $Ax = 0 = Ay$.

(c) (Examen Mai 2024) Soit T un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. On peut toujours trouver une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle T se représente par une matrice dont la première colonne est égale au vecteur unitaire $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^\sim$.

Exercice 3.14 (Examen Août 2023)**.** Soient u_1, u_2, u_3, u_4 une base d'un espace vectoriel E (de dimension 4) et T un endomorphisme de E. La matrice M qui représente T dans cette base est telle que si $i \geq j$, alors $M_{i,j} = 0$. Quels renseignements tirez-vous sur Tu_k pour $k = 1, 2, 3, 4$? Rappelez le résultat théorique utilisé. Démontrer ensuite que pour tout $x \in E$, $T^4x = 0$.

Exercice 3.15 (Examen Mai 2023)**.** Soient u_1, u_2, u_3, u_4 une base d'un espace vectoriel E (de dimension 4) et T un endomorphisme de E tel que

$$T(u_1) \in \rangle u_1, u_2\langle, \quad T(u_2) \in \rangle u_1, u_2\langle, \quad T(u_3) \in \rangle u_3, u_4\langle \quad \text{et} \quad T(u_4) \in \rangle u_3, u_4\langle.$$

Quels renseignements pouvez-vous tirer sur la matrice représentant T dans cette base ? En particulier, quels éléments de la matrices sont nécessairement nuls ? Rappelez le résultat théorique utilisé.

Exercice 3.16 (Examen Août 2021)**.** On considère l'application linéaire

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_4 \\ x_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

(a) Dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$, représenter T.

(b) Dans la base $(e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3 - e_4, e_3 + e_4)$ de $\mathbb{R}^4$, représenter T.

(c) Donner une base du noyau de T, une base de l'image de T. Vérifier le théorème de la dimension.

(d) T est-il un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même ? Justifier votre réponse.

Exercice 3.17 (Examen Juin 2019)**.** On considère une base $U = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{aligned} T(u_1) &= u_1 + 2u_2, \\ T(u_2) &= u_1 + 3u_2 + u_3, \\ T(u_3) &= u_2 + u_3. \end{aligned}$$

(a) Calculer $T(u_1 + u_2 + u_3)$.

(b) Représenter matriciellement T dans la base U.

(c) Soient les éléments $w_1 = -u_1 + 2u_3$, $w_2 = u_1 + u_3$, $w_3 = u_2$ (il est acquis que ces vecteurs forment une base). Représenter matriciellement T dans cette base (w_1, w_2, w_3).

(d) Fournir une base de $\mathrm{Ker}(T)$. En déduire la dimension de l'image de T.

Exercice 3.18 (Examen Septembre 2014)**.** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $u_1 = (1, 0, -1)^\sim$, $u_2 = (0, 2, 3)^\sim$ et $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tel que $Tu_1 = (2, 1, 0)^\sim$ et $Tu_2 = (1, 0, 1)^\sim$.

(a) Choisir un vecteur u_3 tel que $U = (u_1, u_2, u_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ (on gardera cette base tout au long de l'exercice). Dans cette base, donner $\Phi_U(Tu_1)$ et $\Phi_U(Tu_2)$.

(b) Soit l'ensemble E formé des vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $Tu_3 = v$ et le rang de T vaut 2. Exhiber un élément appartenant à E. Cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel ? Si oui, quelle en est sa dimension ?

(c) Fournir un vecteur w tel que $Tu_3 = w$ et T est un isomorphisme.

(d) Si $Tu_3 = (5, 3, -1)^\sim$, représenter matriciellement T dans la base U et donner une base du noyau de T.

Exercice 3.19 ($\star$)**.** Soient A, B deux polynômes de degré $n + 1$. On définit l'application $T : \mathbb{R}_{\leq n}[x] \to \mathbb{R}_{\leq n}[x]$ qui à un polynôme P associe le reste de AP dans la division euclidienne par B.

(a) Démontrer que T est linéaire.

(b) Démontrer que T est bijectif si et seulement si A et B sont premiers entre eux.

Exercice 3.20 ($\star$)**.** Le but de l'exercice est d'étudier l'opérateur $\Delta : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ défini par $(\Delta P)(x) = P(x+1) - P(x)$.

(a) Question préliminaire : Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}[x]$ telle que $\deg(P_n) = n$ pour chaque n. Prouver que $(P_n)_n$ est une base de $\mathbb{R}[x]$.

(b) Montrer que Δ est une application linéaire. Calculer son noyau et son image.

(c) Montrer qu'il existe une unique famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[x]$ telle que

$$H_0 = 1, \quad \Delta(H_n) = H_{n-1} \quad \text{et} \quad H_n(0) = 0.$$

Montrer que $(H_n)_n$ est une base de $\mathbb{R}[x]$.

(d) Soit P un polynôme réel de degré $p \in \mathbb{N}$. Montrer que P peut s'écrire

$$P = \sum_{n=0}^{p} (\Delta^n P)(0) H_n.$$

(e) Montrer que l'on a

$$(\Delta^n P)(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k).$$

(f) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$,

$$H_n = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}.$$

(g) En déduire que pour tout polynôme P de degré p, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) P prend des valeurs entières sur $\mathbb{Z}$.

(ii) P prend des valeurs entières sur $\{0, \dots, p\}$.

(iii) Les coordonnées de P dans la base $(H_n)_n$ sont des entiers.

(iv) P prend des valeurs entières sur $p+1$ entiers consécutifs.

4 Opérateurs linéaires II

4.1 ***Exercices au tableau***

Exercice 4.1. Soit E un espace vectoriel et $T, S \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $T \circ S = S \circ T$. Démontrer que $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$ sont stables par S, *i.e.*

$$S(\mathrm{Ker}(T)) \subset \mathrm{Ker}(T) \quad \text{et} \quad S(\mathrm{Im}(T)) \subset \mathrm{Im}(T).$$

Exercice 4.2. Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si $T \in \mathcal{L}(E)$, montrer que

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow (T^2 = 0 \quad \text{et} \quad 2 \cdot \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(E)).$$

Exercice 4.3. Soient E un espace vectoriel réel de dimension 2 et $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $T^2 = -\mathrm{id}$. Montrer que $x \in E \setminus \{0\}$ et Tx forment une base.

Exercice 4.4. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ***involutif*** (*i.e.* $T^2 = \mathrm{id}$). Démontrer que $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}(T + \mathrm{id})$.

Exercice 4.5. Soient E et F deux espaces vectoriels, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant

$$T \circ S \circ T = T \quad \text{et} \quad S \circ T \circ S = S.$$

Démontrer que $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(S)$ sont supplémentaires.

4.2 ***Exercices en autonomie***

Exercice 4.6. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-vectoriels, et soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g).$$

Exercice 4.7 (Examen Août 2024)**.** Soit T un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(T^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(T^2) \subseteq \mathrm{Im}(T).$$

Donner un exemple pour lequel au moins l'une des deux inclusions est stricte.

Exercice 4.8 (Examen Mai 2022)**.** Donner *un exemple* d'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ distincte de l'identité et de l'application nulle telle que $T^2 = T$. Justifier votre construction.

Exercice 4.9 (Examen Mai 2021)**.** Donner *un exemple* d'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ telle que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$. Justifier votre construction.

Exercice 4.10. Soit E un espace vectoriel et $T \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(T), \mathrm{Ker}(T - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(T + \mathrm{id})$ sont en somme directe.

Exercice 4.11. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ***involutif*** (*i.e.* $T^2 = \mathrm{id}$). Démontrer que

$$\mathrm{Ker}(T + \mathrm{id}) = \mathrm{Im}(T - \mathrm{id})$$
$$E = \mathrm{Ker}(T - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(T + \mathrm{id}).$$

Réciproquement, montrer qu'à toute décomposition $E = A \oplus B$ correspond une unique involution T telle que $A = \mathrm{Ker}(T - \mathrm{id})$ et $B = \mathrm{Ker}(T + \mathrm{id})$.

Exercice 4.12. Soit E un espace vectoriel et $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, les vecteurs x et Tx sont linéairement dépendants.

(a) Démontrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $Tx = \lambda_x x$.

(b) Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$ lorsque x et y sont linéairement dépendants.

(c) Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$ lorsque x et y sont linéairement indépendants.

(d) En déduire que T est une homothétie, *i.e.* il existe un scalaire λ tel que $Tx = \lambda x$ pour tout $x \in E$.

5 Diagonalisation I

5.1 *Exercices au tableau*

Exercice 5.1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est diagonalisable et calculer ses valeurs propres. En déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.

Exercice 5.2. Diagonaliser, si possible, les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si A (resp. B) est diagonalisable, en déduire A^n (resp. B^n) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.3. Pour quelle(s) valeur(s) du complexe α, les matrices

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha & -\alpha \\ -2 & -\alpha & 2 \\ -1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 2\alpha & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles diagonalisables ?

Exercice 5.4. Déterminer si les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

Exercice 5.5. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser A et en déduire toutes les matrices M qui commutent avec A.

Exercice 5.6. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer A^2 et en déduire une relation simple liant A^2, A et I_4.

(b) En déduire que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

(c) Diagonaliser A.

5.2 *Exercices en autonomie*

Exercice 5.7. Diagonaliser, si possible, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si elle est diagonalisable, en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.8 (Examen Juin 2010)**.** Diagonaliser, si possible, les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si $M \in \{A, B\}$ est diagonalisable, fournir explicitement une matrice S qui diagonalise M et la matrice diagonale $S^{-1}MS$ correspondante.

Exercice 5.9. Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

(a) (Examen Août 2024) Une matrice (carrée) triangulaire supérieure est toujours diagonalisable.

(b) (Examen Mai 2024) Soient A, B deux matrices 3×3 ayant même trace et même déterminant. Ces deux matrices ont les mêmes valeurs propres.

(c) (Examen Mai 2024) Si deux matrices A et B ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités algébriques correspondantes, alors A est diagonalisable si et seulement si B l'est.

(d) (Examen Mai 2024) Si A est une matrice carrée diagonalisable, alors A^2 est aussi diagonalisable.

(e) (Examen Août 2023) Soit A une matrice de $\mathbb{C}^2_2$. Son polynôme caractéristique est donné par

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A),$$

où $\operatorname{tr}(A)$ dénote la trace de A.

(f) (Examen Mai 2023) Soient A, B deux matrices diagonalisable par une même matrice S. Alors $AB = BA$.

(g) (Examen Mai 2023) Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle ne possède pas de valeur propre nulle.

(h) (Examen Mai 2022) Les valeurs propres d'une matrice 3×3 à coefficients entiers sont réelles.

Exercice 5.10 (Examen Mai 2023)**.** Soit A une matrice carrée de dimension 5×5 à coefficients réels ayant 2, $1 + i$ et $3 - i$ comme valeurs propres. Peut-on déterminer l'ensemble des valeurs propres de A ? Justifier.

Exercice 5.11 (Examen Juin 2013)**.** A quelles conditions sur les paramètres $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ? Quand M est diagonalisable, fournir une matrice inversible S telle que $S^{-1}MS$ soit diagonale.

Exercice 5.12 (Examen Août 2023)**.** On considère la matrice

$$\begin{pmatrix} 8 + 2\alpha & 2\alpha & -2 + 2\alpha \\ -1 - \alpha & 6 - 4\alpha & 1 - 7\alpha \\ -1 + 2\alpha & 2\alpha & 7 + 2\alpha \end{pmatrix}$$

qui est telle que

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 21\lambda^2 - 144\lambda + 324.$$

(a) Vérifier que les valeurs propres de A sont 6 et 9. Donner leur multiplicité algébrique.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice A est-elle diagonalisable ?

(c) Quand A est diagonalisable, fournir une matrice inversible S telle que $S^{-1}AS$ soit diagonale. Fournir la matrice $S^{-1}AS$ correspondante.

Exercice 5.13 (Examen Mai 2022)**.** Soient $\phi \in \mathbb{R}$ un paramètre et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ \phi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \phi & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de ϕ, la matrice M ne possède-t-elle que des valeurs propres simples ?

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de ϕ, la matrice M est-elle diagonalisable ? (On ne demande **pas** de diagonaliser.)

(c) Soient les vecteurs

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de ϕ, x est-il un vecteur propre de M ? Justifier que y n'est jamais vecteur propre de M.

Exercice 5.14 (Examen Mai 2021)**.** Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 0 & 2-2\alpha \\ 2-\alpha & \alpha-2 & 3 & 2-2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 3-\alpha \end{pmatrix}.$$

On donne (inutile de le vérifier)

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - \alpha - 1)^2(\lambda - 3 + \alpha)^2$$

(a) Montrer que pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 2$, les matrices correspondantes ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités algébriques.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice A possède-t-elle une unique valeur propre (de multiplicité algébrique 4) ? Dans ce(s) cas, A est-elle diagonalisable ?

(c) Pour $\alpha = 0$, si possible, diagonaliser A.

(d) En exploitant le point précédent, pour $\alpha = 0$, vérifier que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{A}{3}\right)^n \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Suggestion : plusieurs méthodes de résolution sont possibles, il n'est pas nécessaire de réaliser un calcul du type S^{-1}, on peut aussi décomposer le vecteur colonne u dans une base formée de vecteurs propres.

(e) Toujours pour $\alpha = 0$, justifier que $P(z) = z^2 - 4z + 3$ est le polynôme minimum de A (*i.e.*, polynôme de plus petit degré annulé par A).

Exercice 5.15 (Examen Mai 2024)**.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\alpha & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4-\alpha & 4-2\alpha & -2 & \alpha-2 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer qu'il existe une unique valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$ pour laquelle la matrice A est diagonalisable.

(b) Quand A est diagonalisable, fournir une matrice inversible S telle que $S^{-1}AS$ soit diagonale et donner la forme correspondante de $S^{-1}AS$.

(c) En fonction de α, quelle est la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 0 ?

(d) En déduire la dimension du sous-espace de $\mathbb{C}^4$

$$F = \{y \in \mathbb{C}^4 \mid \exists x \in \mathbb{C}^4 : y = Ax\}.$$

(e) En supposant $\alpha \neq 2$, comment se représente l'endomorphisme $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4, x \mapsto Ax$ dans la base suivante ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2-\alpha} \\ \frac{1}{\alpha-2} \\ \frac{1}{2-\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.16 ($\star$)**.** Soit A une matrice complexe diagonalisable de taille $n \times n$ et soit B la matrice définie par

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right).$$

Donner les valeurs propres de B et la dimension des sous-espaces propres correspondants. A quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Exercice 5.17 ($\star$)**.** Pour $n \geq 1$, soit

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$ son polynôme caractéristique.

(a) Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).$$

Calculer P_1 et P_2.

(b) Pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, on pose $x_\alpha = 2\cos\alpha$. Démontrer que

$$P_n(x_\alpha) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin\alpha}.$$

(c) En déduire que A_n est diagonalisable.

6 Diagonalisation II

6.1 ***Exercices au tableau***

Exercice 6.1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable ?

(b) Plus généralement, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

Exercice 6.2. Chercher les valeurs propres de l'opérateur

$$T\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : f \mapsto Df$$

ainsi que les sous-espaces propres associés.

Exercice 6.3. Soit $E = \mathbb{C}^\mathbb{N}$ le $\mathbb{C}$-vectoriel des suites à coefficients complexes, et T l'endomorphisme de E qui à une suite $(u_n)_n$ associe la suite $(v_n)_n$ définie par $v_0 = u_0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

Exercice 6.4. Chercher les valeurs propres de l'opérateur

$$S\colon \mathbb{R}_{\leq n}[x] \to \mathbb{R}_{\leq n}[x] : p \mapsto \frac{1}{x-1}\int_1^x p(t)dt.$$

après avoir vérifié que ce dernier est bien linéaire. Lorsque $n = 2$, trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ telle que la matrice qui représente S dans $\mathcal{B}$ soit diagonale.

Exercice 6.5. Soient A et B deux matrices de $\mathbb{C}^n_n$. Prouver que si les valeurs propres de A sont simples et que B commute avec A, alors B est diagonalisable.

6.2 ***Exercices en autonomie***

Exercice 6.6 (Examen Mai 2023)**.** Soit $E = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ le $\mathbb{R}$-vectoriel des polynômes de degré au plus 2. On considère l'application linéaire dérivée $D : E \to E$. L'unique valeur propre de D est zéro. Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Exercice 6.7. Chercher les valeurs propres de l'opérateur

$$T\colon \mathbb{C}_{\leq n}[z] \to \mathbb{C}_{\leq n}[z] : p \mapsto (z^2 - 1)D^2p(z) + (2z + 1)Dp(z)$$

après avoir vérifié que ce dernier est bien linéaire.

Exercice 6.8 (Examen Août 2023)**.** On considère l'application linéaire

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 2x_2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ -x_1 - x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$, représenter T.

(b) Dans la base de $\mathbb{R}^4$
$$(e_1 - e_4, e_2 - e_4, e_1 - e_2 - e_3, e_1 - e_3),$$
représenter T.

(c) Donner les valeurs propres de T et leurs multiplicités géométriques respectives.

(d) Donner une base du noyau de T, une base de l'image de T. Vérifier le théorème de la dimension.

(e) T est-il un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même ? Justifier votre réponse.

Exercice 6.9 (Examen Mai 2022)**.** Soit E un $\mathbb{C}$-vectoriel ayant $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ comme base. On considère l'endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ défini par
$$Tu_1 = u_1 + u_2, \quad Tu_2 = 2u_1 + u_2, \quad Tu_3 = 3u_3 + 2u_4 \quad \text{et} \quad Tu_4 = 3u_4.$$

(a) Représenter matriciellement T dans la base U.

(b) Quelles sont les valeurs propres de T ainsi que leurs multiplicités algébrique et géométrique respectives ?

(c) Représenter matriciellement $T^2 - \mathrm{id}$ dans la base U ; déduire du point précédent les valeurs propres de $T^2 - \mathrm{id}$.

(d) Soit la base
$$V = (w_1 = u_1 + u_2 \ ; \ w_2 = u_1 - u_2 \ ; \ w_3 = u_3 + u_4 \ ; \ w_4 = u_3 - u_4).$$
Représenter matriciellement T dans la base V.

(e) Déterminer l'image et le noyau de T. Que pouvez-vous conclure (injection, surjection, bijection) ?

Exercice 6.10 ($\star$)**.** Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ défini par $T(P)(x) = x^n P(1/x)$. Démontrer que T est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$, déterminer ses valeurs propres et une base de vecteurs propres associés.
Suggestion : Calculer T^2P pour un polynôme quelconque $P \in \mathbb{R}_{\leq n}[x]$, et en déduire un polynôme annulateur de T.

7 Diagonalisation et polynômes d'endomorphisme

7.1 *Exercices au tableau*

Exercice 7.1. Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathbb{R}^n_n$.

(a) Démontrer que si ω est une valeur propre de A de multiplicité s, alors $\overline{\omega}$ est une valeur propre de A de multiplicité s.

(b) On suppose que $A^3 - 3A - 4I_n = 0$. Montrer que A est de déterminant strictement positif.

(c) On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.

(d) On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est pair.

(e) On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Démontrer que $\operatorname{tr}(A)$ est un entier négatif.

Exercice 7.2. Déterminer le polynôme minimum des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.3. Soit $A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_k)$ où les A_i sont des matrices complexes carrées. Prouver que le polynôme minimum de A est égal au ppcm de celui des A_i pour $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Exercice 7.4. Soit $A \in \mathbb{C}^n_n$ tel que $A^3 + I = 0$ et $\operatorname{tr}(A) = \det(A) = -1$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 7.5. Soit T un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-vectoriel E de dimension finie, et soit $\mathcal{M}_T$ son polynôme minimal. Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Démontrer que $P(T)$ est inversible si et seulement si P et $\mathcal{M}_T$ sont premiers entre eux.

Exercice 7.6. Soit $n \geq 1$. Déterminer les polynômes minimum et caractéristique de l'application

$$D \colon \mathbb{C}_{\leq n}[z] \to \mathbb{C}_{\leq n}[z] : p \mapsto Dp(z).$$

7.2 *Exercices en autonomie*

Exercice 7.7. Déterminer le polynôme minimum des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.8. Soit

$$T \colon \mathbb{C}^2_2 \to \mathbb{C}^2_2 : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés de T.

(b) L'opérateur T est-il diagonalisable ?

(c) Déterminer le polynôme minimum de T.

Exercice 7.9. Soient $\alpha \in \mathbb{C}_0$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On désigne par T l'application

$$T \colon \mathbb{C}_{\leq n}[z] \to \mathbb{C}_{\leq n}[z] : p \mapsto p(\alpha) + \alpha p'(\alpha) z + \frac{\alpha^2}{2} p''(\alpha) z^2.$$

(a) Montrer que T est linéaire.

(b) Donner une représentation matricielle M de la restriction de T à $\mathbb{C}_{\leq 2}[z]$ ainsi que son polynôme caractéristique.

(c) Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice M est-il diagonalisable ?

(d) Déterminer le polynôme minimum de M.

(e) Quel est le rang de T ? Montrer que $\operatorname{Im}(T) \oplus \operatorname{Ker}(T) = \mathbb{C}_{\leq n}[z]$.

(f) Donner les polynômes minimum et caractéristique de T.

Exercice 7.10. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un champ $\mathbb{K}$ et T un endomorphisme de E. Montrer que si $x \in E$ est tel que $x, Tx, \ldots, T^{n-1}x$ est une base de E, alors le polynôme minimum et le polynôme caractéristique de T coïncident (à multiplication par -1 près).

Exercice 7.11. Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $T \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que T possède un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer qu'on a alors

$$\operatorname{Im}(T) \oplus \operatorname{Ker}(T) = E.$$

Exercice 7.12. Soit $M \in \mathbb{C}^n_n$ et $p \geq 1$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si M^p est diagonalisable et $\operatorname{Ker}(M) = \operatorname{Ker}(M^p)$. Le résultat subsiste-t-il si on travaille dans $\mathbb{R}$?

Exercice 7.13 ($\star$). Soit $n \geq 1$. Déterminer les polynômes minimum et caractéristique de l'application

$$S\colon \mathbb{C}_{\leq n}[z] \to \mathbb{C}_{\leq n}[z] : p \mapsto p(z+1).$$

Exercice 7.14 ($\star$). Déterminer les matrices $A \in \mathbb{R}^n_n$ telles que $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$ soit diagonalisable.