Université de Liège

Année académique 2019 – 2020

Algèbre

Titulaire: M. Rigo
M.Rigo@uliege.be

Assistants: C. Dubussy, A. Massuir
C.Dubussy@uliege.be, a.massuir@uliege.be

1 Espaces vectoriels I

Définitions [pages 121 et 123, version 2009-2010]
Un *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-vectoriel est un ensemble E muni d'une application interne

$$+ \colon E \times E \to E$$

et d'une application interne

$$\cdot \colon \mathbb{K} \times E \to E$$

qui jouit des propriétés suivantes:

(1) $(E, +)$ est un groupe commutatif.

(2) pour tous $x, y \in E$ et tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

- (2.1) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$,
- (2.2) $1 \cdot x = x$,
- (2.3) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$,
- (2.4) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.

Des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de E sont *linéairement indépendants* si la seule façon d'obtenir le vecteur nul comme combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$ est de considérer une combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls.

Exercices

1. Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}^3$, les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ i \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3i \\ -14 \\ 7i \end{pmatrix}$$

sont-ils linéairement indépendants ? Montrer que E peut être considéré comme un espace vectoriel $E_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$. Dans $E_{\mathbb{R}}$, les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont-ils linéairement indépendants ? Quelle est la dimension de $E_{\mathbb{R}}$?

2. On considère $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. A quelles conditions sur $z \in \mathbb{C}$ les éléments 1 et z sont-ils linéairement dépendants ? A quelles conditions sur $z \in \mathbb{C}_0$ les éléments $\frac{1}{z}$ et 1 sont-ils linéairement dépendants ? Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, les éléments $1, z$ et z^2 sont toujours linéairement dépendants et trouver une relation linéaire entre eux.

3. Dans l'espace vectoriel des fonctions continues réelles, étudier l'indépendance linéaire de 1, sin et cos.

4. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base d'un espace vectoriel E. On donne les vecteurs
$$e_1' = e_1 + e_2 + e_3, \quad e_2' = -e_1 + e_2 + 2e_3, \quad e_3' = e_3 - 2e_4, \quad e_4' = e_1 - e_2 - e_3.$$
   (a) Démontrer que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$ est une base de E.
   (b) Exprimer la formule de changement de base permettant de passer de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

5. Démontrer que les polynômes P_1, P_2, P_3 définis ci-après forment une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{P}_2$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$:
$$\forall z \in \mathbb{C} \quad P_1(z) = z, \quad P_2(z) = 2z + 1, \quad P_3(z) = z^2 + 2z + 2.$$
Déterminer les composantes des polynômes Q_1, Q_2, Q_3 dans cette base si
$$\forall z \in \mathbb{C} \quad Q_1(z) = 1, \quad Q_2(z) = z, \quad Q_3(z) = z^2.$$
Écrire en général les formules de changement de base établissant le lien entre les composantes des polynômes de $\mathcal{P}_2$ dans ces deux bases.

6. Soit $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ une base d'un espace vectoriel E. Démontrer que les vecteurs
$$y_1 = x_1, y_2 = x_1 + x_2, \ldots, y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$
forment une base $\mathcal{B}'$ de E et établir la formule permettant de passer de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

7. **(Proposé)** Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, les polynômes 1, $z - a$, $(z - a)^2$ et $(z - a)^3$ forment une base de l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 3. Rechercher les composantes d'un élément quelconque dans cette base. Ecrire la formule de changement de base de cette base à la base 1, z, z^2, z^3 de cet espace.

8. **(Proposé)** Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E. Sous quelles conditions sur les paramètres réels a et b les vecteurs
$$v_1 = a\,e_1 + b\,e_2 \quad v_2 = a\,e_2 + b\,e_3, \quad v_3 = a\,e_3 + b\,e_1$$
sont-ils linéairement indépendants? Forment-ils une base de E lorsque $a = b = 1$? Si oui, quelles sont les composantes du vecteur $u = 2e_1 + e_2 - e_3$ dans la base (v_1, v_2, v_3) ?

9. **(Proposé)** Soient V un espace vectoriel et des vecteurs $a_1, a_2, a_3 \in V$ linéairement indépendants. Les vecteurs
$$v_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad v_2 = a_1 - a_2 + a_3, \quad v_3 = a_1 + a_2 - a_3$$
sont-ils linéairement indépendants ?

2 Espaces vectoriels II

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. On définit les ensembles

$$F = \{X \in \mathbb{R}^2_2 \colon AX = 0\}, \quad G = \{X \in \mathbb{R}^2_2 \colon XA = 0\}, \quad H = \{X \in \mathbb{R}^2_2 \colon AX = XA\}.$$

Démontrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2_2$. Donner une base et la dimension de chaque sous-espace. Décrire $F \cap G$, $F \cap H$ et $G \cap H$.

2. Dans cet exercice, $\mathcal{P}_2$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Montrer que

$$L = \{P \in \mathcal{P}_2 \colon \forall z \in \mathbb{C}_0 \; z^2 P\left(\frac{1}{z}\right) = P(z)\}$$

et

$$M = \{P \in \mathcal{P}_2 \colon \forall z \in \; P(z+1) = P(-z)\}.$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{P}_2$. Déterminer la dimension et une base de L, M, $L+M$ et $L \cap M$.

3. Soient

$$S_n = \{A \in \mathbb{C}^n_n \colon \widetilde{A} = A\} \text{ et } A_n = \{A \in \mathbb{C}^n_n \colon \widetilde{A} = -A\}.$$

Démontrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n_n$. Donner des bases et les dimensions de S_n et A_n. Montrer qu'on a $\mathbb{C}^n_n = S_n \oplus A_n$.

4. Soient A et B les parties de $\mathbb{R}^4$ définies par

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \colon \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_3 = x_4^2 + 1 \end{cases} \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ engendrés respectivement par A et B. Démontrer qu'on a $F = G$.

5. **(Proposé)** Soit $E = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient

$$P = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \text{ et } I = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Démontrer qu'on a $E = P \oplus I$.

6. **(Proposé)** Soient

$$H_n = \{A \in \mathbb{C}^n_n \colon A^* = A\} \text{ et } U_n = \{A \in \mathbb{C}^n_n \colon A^* = -A\}.$$

Démontrer, si possible, que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n_n$ et qu'on a $\mathbb{C}^n_n = H_n \oplus U_n$ lorsque $\mathbb{C}^n_n$ est vu

   (a) comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel;

   (b) comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3 Polynômes de $\mathbb{C}[z]$

1. Effectuer la division euclidienne de $z^5 + 2z^4 - z^3 + 22z$ par $z^2 - 4z + 1$.

2. Déterminer des polynômes U et V tels que $(z^7 - z - 1)\, U\ + (z^5 + 1)\, V = 1$.

3. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$. Calculer le reste de la division de $(\sin(a) - z\cos(a))^n$ par $z^2 + 1$.

4. Quels sont les polynômes P de degré au plus égal à 5 tels que $P + 10$ soit divisible par $(z+2)^3$ et $P - 10$ soit divisible par $(z-2)^3$?

5. Démontrer que $z^{104} + z^{93} + z^{82} + z^{71} + 1$ est divisible par $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

6. **(Interro 5 mars 2007)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^3 - 7x^2 - 28x + 160 = 0$$

sachant qu'elle admet une solution négative ainsi que deux solutions positives dont l'une est le double de l'autre.

7. (**Examen juin 2012**) Le polynôme $z^9 + 2z^5 + 3z^4 + 5z^2 + 6z + 7$ possède-t-il un zéro de module supérieur à 9 ?

8. **(Interro 14 octobre 2013)** Pour chacune des trois applications suivantes, déterminer s'il s'agit d'une injection et/ou d'une surjection:

   - $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z + 1 + i$
   - $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto ze^{i\pi/2}$
   - $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2$

9. **(Interro 18 février 2013)** Soit $n \geq 2$ un entier. Factoriser $z^n - 1$ dans $\mathbb{C}$. En déduire que $z^n - 1$ et $D_z(z^n - 1)$ n'ont pas de zéro commun. Déterminer la valeur du produit suivant

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{2ik\pi/n}.$$

10. **(Proposé)** Calculer un pgcd de $z^6 - 7z^4 + 8z^3 - 7z + 7$ et $3z^5 - 7z^3 + 3z^2 - 7$.

11. **(Proposé)** Pour quelles valeurs complexes de a, b, c, le polynôme $z^5 + 2z^4 + 6z^3 + az^2 + bz + c$ est-il divisible par les polynômes $z(z-1)$, $(z-1)^2$ ou $z^2 + 1$?

12. **(Proposé)** Soit $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$. Démontrer que 1 est un zéro triple du polynôme

$$z^{2n} - nz^{n+1} + nz^{n-1} - 1.$$

4 Fractions rationnelles

1. Décomposer en fractions rationnelles simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle
$$\frac{(2-i)z^3+(3+4i)z^2-(4-5i)z-(1+4i)}{(z+i)^3(z-1)}.$$

2. Décomposer en fractions rationnelles simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles
$$\frac{z^3+3z^2-11z+12}{(z^2+1)(z-2)^2}, \quad \frac{1}{z(z^4+1)} \quad \text{et} \quad \frac{z^5+1}{z^3(z^2+1)}.$$

3. **(Interro 28 février 2005)** Soit $a \in \mathbb{R}$. Décomposer en fractions rationnelles simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle
$$\frac{z^5}{(z^2+a)^2}.$$

4. Décomposer en fractions rationnelles simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle
$$\frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n)}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

5. **(Proposé)** Décomposer en fractions rationnelles simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle
$$\frac{1}{(1+z)^n(1+z^2)}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

6. **(Proposé)** Démontrer l'identité
$$\frac{1}{(x+x_1)^{n_1}(x+x_2)^{n_2}} = \sum_{i=0}^{n_1-1}\binom{n_2-1+i}{n_2-1}\frac{(-1)^i}{(x_2-x_1)^{n_2+i}(x+x_1)^{n_1-i}} + \sum_{i=0}^{n_2-1}\binom{n_1-1+i}{n_1-1}\frac{(-1)^{n_1}}{(x_2-x_1)^{n_1+i}(x+x_2)^{n_2-i}}$$
pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ et tous $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$.

5 Opérateurs linéaires I

1. Vrai ou faux ?

   (a) L'application $T\colon \mathbb{R}^2 \to [-1,1],\ (x,y) \mapsto \sin(x+y)$ est linéaire.

   (b) L'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x+2y,-z)$ est linéaire.

   (c) Dans $\mathbb{C}^2$ considéré comme un $\mathbb{R}$-vectoriel, l'application

   $$T\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\ (x,y) \mapsto (\overline{x+y}, x+iy)$$

   est linéaire.

2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que l'application $U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est linéaire et qu'il s'agit d'un isomorphisme.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que l'application $T\colon \mathcal{P}_3 \to \mathbb{C}_3^3,\ P \mapsto P(M)$ est linéaire. Donner des bases des image et noyau.

4. On considère l'endomorphisme

   $$T\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3,\ P(z) \mapsto D_z\big((1-z^2)D_zP(z)\big) + 6P(z).$$

   Déterminer $\ker(T)$ et $\operatorname{im}(T)$.

5. On pose $P_0(z) = z^2+z,\ P_1(z) = z^2+1,\ P_2(z) = z+1$.

   - Montrer que P_0, P_1, P_2 forment une base de $\mathcal{P}_2$ et donner les composantes de az^2+bz+c dans cette base.
   - On définit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2, \mathbb{C})$ par $TP_0 = TP_1 = TP_2 = 2$. Quelle est l'image de az^2+bz+c ?
   - Déterminer $\ker(T)$ et montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

   $$\ker(T) = \{P \in \mathcal{P}_2\colon P(z_0) = 0\}.$$

6. Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $T\colon \mathbb{C}_2^2 \to \mathbb{C}_2^2\colon A \mapsto AM - MA$.

   a) Montrer que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_2^2)$.

   b) Trouver des bases et les dimensions des noyau et image.

   c) Donner la matrice qui représente T dans la base canonique.

7. Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère

   $$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = t\}.$$

   Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

8. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme T de $\mathbb{R}^4$ tel que, si (e_1,e_2,e_3,e_4) désigne la base canonique, alors on a

   - $T(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$ et $T(2e_1 + 3e_4) = e_2$,
   - $\ker(T) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+2y+z = 0 \text{ et } x+3y-t = 0\}$.

6 Opérateurs linéaires II

1. Soit E un espace vectoriel et $T, S \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $T \circ S = S \circ T$. Démontrer que $\ker(T)$ et $\operatorname{im}(T)$ sont stables par S, i.e.

$$S(\ker(T) \subset \ker(T) \quad \text{et} \quad S(\operatorname{im}(T)) \subset \operatorname{im}(T).$$

2. Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si $T \in \mathcal{L}(E)$, montrer que

$$\operatorname{im}(T) = \ker(T) \iff T^2 = 0 \ \text{ et } \ 2\dim(\operatorname{im}(T)) = \dim(E).$$

3. Soient E est un espace vectoriel réel de dimension 2 et $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $T^2 = -id$. Montrer que $x \in E \setminus \{0\}$ et Tx forment une base.

4. Soit E un espace vectoriel et $T \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\ker(T), \ker(T - \mathrm{id})$ et $\ker(T + \mathrm{id})$ sont en somme directe.

5. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur involutif (i.e. $T^2 = \mathrm{id}$). Démontrer que

$$\begin{aligned} \ker(T - \mathrm{id}) &= \operatorname{im}(T + \mathrm{id}) \\ \ker(T + \mathrm{id}) &= \operatorname{im}(T - \mathrm{id}) \\ E &= \ker(T - \mathrm{id}) \oplus \ker(T + \mathrm{id}). \end{aligned}$$

   Réciproquement, montrer qu'à toute décomposition $E = A \oplus B$ correspond une unique involution T telle que $A = \ker(T - \mathrm{id})$ et $B = \ker(T + \mathrm{id})$.

6. Soient E et F deux espaces vectoriels, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant

$$T \circ S \circ T = T \quad \text{et} \quad S \circ T \circ S = S.$$

   Démontrer que $\ker(T)$ et $\operatorname{im}(S)$ sont supplémentaires.

7. Soit E un espace vectoriel et $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $T(x)$ sont linéairement dépendants.

   - Démontrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $T(x) = \lambda_x x$.
   - Comparer λ_x et λ_y lorsque x et y sont linéairement dépendants.
   - Comparer λ_x et λ_y lorsque x et y sont linéairement indépendants.
   - En déduire que T est une homothétie, i.e. il existe un scalaire λ tel que $T(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$.

7 Opérateurs linéaires III

1. Notons $\mathcal{P}_3$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré au plus 3. Pour tout $P \in \mathcal{P}_3$, on pose

$$f(P) = P(1-z) + P(1) - P(z) \quad \text{et} \quad g(P) = \frac{1}{4!} D_z^3(P(z^2)) - zD_zP(z) + z^3 P\left(\frac{1}{z}\right).$$

   a) Montrer que $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$.

   b) Donner les matrices qui représentent f et g dans la base canonique. En déduire les matrices qui représentent $f \circ g$ et $g \circ f$.

   c) Soit $Q(z) = z(1-z)$. Calculer $(f \circ g)(Q)$ et $(g \circ f)(Q)$.

   d) Donner des bases des noyaux et images de $f \circ g$ et $g \circ f$.

   e) A-t-on $\mathrm{rg}(f \circ g) = \mathrm{rg}(g \circ f)$?

2. Notons $\mathcal{R}_3$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3. Pour tout $P \in \mathcal{R}_3$, on pose

$$f(P) = \begin{pmatrix} P(1) \\ (D_xP)(1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(P) = P + (x-1)D_xP - P(1).$$

   a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{R}_3, \mathbb{R}^2)$ et que $g \in \mathcal{L}(\mathcal{R}_3)$.

   b) Donner leur représentation matricielle dans les bases canoniques

$$\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   c) Même question en remplaçant $\mathcal{C}$ par $\mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$.

   d) Donner les matrices de changement de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

   e) Donner des bases de $\mathrm{im}(f)$, $\ker(f)$, $\mathrm{im}(g)$ et $\ker(g)$.

   f) Pout tout $n \in \mathbb{N}$, calculer g^n.

3. (**Examen septembre 2014**) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $u_1 = (1, 0, -1)^\sim$, $u_2 = (0, 2, 3)^\sim$ et $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tel que $Tu_1 = (2, 1, 0)^\sim$ et $Tu_2 = (1, 0, 1)^\sim$.

   a) Choisissez un vecteur u_3 tel que $U = (u_1, u_2, u_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ (on gardera cette base tout au long de l'exercice). Dans cette base, donnez $\Phi_U(Tu_1)$ et $\Phi_U(Tu_2)$.

   b) Soit l'ensemble E formé des vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $Tu_3 = v$ et que le rang de T vaut 2. Exhiber un élément appartenant à E. Cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel ? Si oui, qu'elle en est sa dimension ?

   c) Fournir un vecteur w tel que $Tu_3 = w$ et T est un isomorphisme.

   d) Si $Tu_3 = (5, 3, -1)^\sim$, représenter matriciellement T dans la base U et donner une base du noyau de T.

4. Soient A, B deux polynômes de degré $n+1$. On définit l'application $T : \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_n$ qui à un polynôme P associe le reste de AP dans la division euclidienne par B.

   - Démontrer que T est linéaire,
   - Démontrer que T est bijectif si et seulement si A et B sont premiers entre eux.

5. **(Proposé)** Le but de l'exercice est d'étudier l'opérateur $\Delta : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ défini par $(\Delta P)(x) = P(x+1) - P(x)$.

   1) Question préliminaire : Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}[x]$ telle que $\deg(P_n) = n$ pour chaque n. Prouver que (P_n) est une base de $\mathbb{R}[x]$.
   2) Montrer que Δ est une application linéaire. Calculer son noyau et son image.
   3) Montrer qu'il existe une unique famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[x]$ telle que
   $$H_0 = 1, \qquad \Delta(H_n) = H_{n-1}, \qquad H_n(0) = 0.$$
   Montrer que (H_n) est une base de $\mathbb{R}[x]$.
   4) Soit P un polynôme réel de degré $p \in \mathbb{N}$. Montrer que P peut s'écrire
   $$P = \sum_{n=0}^{p} (\Delta^n P)(0) H_n.$$
   5) Montrer que l'on a
   $$(\Delta^n P)(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k).$$
   6) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$
   $$H_n = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}.$$
   7) En déduire que pour tout polynôme P de degré p, les assertions suivantes sont équivalentes
      a) P prend des valeurs entières sur $\mathbb{Z}$.
      b) P prend des valeurs entières sur $\{0, \ldots, p\}$.
      c) Les coordonnées de P dans la base (H_n) sont des entiers.
      d) P prend des valeurs entières sur $p+1$ entiers consécutifs.

8 Diagonalisation I

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable et calculer ses valeurs propres. En déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.

2. Diagonaliser si possible les matrices suivantes:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Pour quelle(s) valeur(s) du complexe α, les matrices
$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha & -\alpha \\ -2 & -\alpha & 2 \\ -1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 2\alpha & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$
sont-elles diagonalisables ?

4. Déterminer si les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
sont semblables.

5. Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Diagonaliser A et en déduire toutes les matrices M qui commutent avec A.

6. Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   - Calculer A^2 et en déduire une relation simple liant A^2, A et I_4.
   - En déduire que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
   - Diagonaliser A.

7. **(Examen juin 2010)** Diagonaliser, si possible, les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $M \in \{A, B\}$ est diagonalisable, fournir explicitement une matrice S et la matrice diagonale $S^{-1}MS$ correspondante.

8. (**Examen juin 2013**) Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

À quelles conditions sur les paramètres $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, la matrice M est-elle diagonalisable ? Quand M est diagonalisable, fournir une matrice inversible S telle que $S^{-1}MS$ soit diagonale.

9. (**Proposé**) Soit A une matrice complexe diagonalisable de taille $n \times n$ et soit B la matrice définie par

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline I_n & 0 \end{array} \right).$$

Donner les valeurs propres de B et la dimension des sous-espaces propres correspondants. A quelle condition B est-elle diagonalisable?

10. (**Proposé**) Pour $n \geq 1$, soit

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$ son polynôme caractéristique.

- Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).$$

  Calculer P_1 et P_2.
- Pour tout $x \in]-2, 2[$, on pose $x = 2\cos\alpha$ avec $\alpha \in]0, \pi[$. Démontrer que

$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin\alpha}.$$

- En déduire que A_n est diagonalisable.

9 Diagonalisation II

1. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$
   - Déterminer, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable?
   - Plus généralement, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

2. Chercher les valeurs propres de l'opérateur
$$T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), f \mapsto Df$$
ainsi que les sous-espaces propres associés.

3. Chercher les valeurs propres de l'opérateur
$$T \colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n,\ p \mapsto (z^2 - 1)D^2 p(z) + (2z + 1)Dp(z)$$
après avoir vérifié que ce dernier est linéaire.

4. Même question pour l'opérateur
$$S \colon \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_n,\ p \mapsto \frac{1}{x-1} \int_1^x p(t)dt.$$
Lorsque $n = 2$, trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{R}_2$ telle que la matrice qui représente S dans $\mathcal{B}$ soit diagonale.

5. Soit T l'endomorphisme de $\mathcal{R}_n$ défini par $T(P)(x) = x^n P(1/x)$. Démontrer que T est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{R}_n$, déterminer ses valeurs propres et une base de vecteurs propres associés.

6. Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites à coefficients complexes, et T l'endomorphisme de E qui à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par $v_0 = u_0$ et pour tout $n \geq 1$,
$$v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$
Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

7. Soient A et B deux matrices de $\mathbb{C}^n_n$. Prouver que si les valeurs propres de A sont simples et que B commute avec A alors B est diagonalisable.

8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\phi(g) = f \circ g$.
   - Démontrer que toute valeur propre de f est une valeur propre de ϕ puis, si λ est une valeur propre de f, déterminer $E_\lambda(\phi)$.
   - En déduire que si f est diagonalisable, alors ϕ est diagonalisable.

10 Diagonalisation et polynômes d'endomorphisme

1. Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathbb{R}_n^n$.

   (a) Démontrer que si ω est une valeur propre de A de multiplicité s, alors $\overline{\omega}$ est une valeur propre de A de multiplicité s.

   (b) On suppose que $A^3 - 3A - 4I_n = 0$. Montrer que A est de déterminant strictement positif.

   (c) On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.

   (d) On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est pair.

   (e) On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Démontrer que $\mathrm{tr}(A)$ est un entier négatif.

2. Soit $A = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_k)$ où les A_i sont des matrices complexes carrées. Prouver que le polynôme minimum de A est égal au ppcm de celui des A_i pour $i \in \{1, \dots, k\}$.

3. Soient $\alpha \in \mathbb{C}_0$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On désigne par T l'application

$$T\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n,\ p \mapsto p(\alpha) + \alpha p'(\alpha) z + \frac{\alpha^2}{2} p''(\alpha) z^2.$$

   (a) Montrer que T est linéaire.

   (b) Donner une représentation matricielle M de la restriction de T à $\mathcal{P}_2$ ainsi que son polynôme caractéristique.

   (c) Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice M est-il diagonalisable ?

   (d) Déterminer le polynôme minimum de M.

   (e) Quel est le rang de T ? Montrer que $\mathrm{im}(T) \oplus \ker(T) = \mathcal{P}_n$.

   (f) Donner le polynôme minimum et caractéristique de T.

4. Soit $A \in \mathbb{C}_n^n$ tel que $A^3 + I = 0$ et $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = -1$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

5. Soit

$$T\colon \mathbb{C}_2^2 \to \mathbb{C}_2^2,\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés de T.

   (b) L'opérateur T est-il diagonalisable ?

   (c) Déterminer le polynôme minimum de T.

6. Déterminer le polynôme minimum des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

7. Soit E un espace vectoriel sur un champ $\mathbb{K}$ de dimension n et T un endomorphisme de E. Si $x \in E$ est tel que $x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x)$ est une base de E alors le polynôme minimum et le polynôme caractéristique de T coïncident (à multiplication par -1 près).

8. Soit T un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, et soit $\mathcal{M}_T$ son polynôme minimal. Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Démontrer que $P(T)$ est inversible si et seulement si P et $\mathcal{M}_T$ sont premiers entre eux.

9. Soit $n \geq 1$. Déterminer le polynôme minimum et caractéristique de l'application

$$S\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n,\ p \mapsto p(z+1).$$

10. Même question pour l'opérateur $D\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n,\ p \mapsto Dp(z)$.

11. Déterminer les matrices $A \in \mathbb{R}_n^n$ telles que $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$ soit diagonalisable.

12. (**Proposé**) Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $T \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que T possède un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer qu'on a alors $\operatorname{im}(T) \oplus \ker(T) = E$.

13. (**Proposé**) Soit $M \in \mathbb{C}_n^n$ et $p \geq 1$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si M^p est diagonalisable et $\ker(M) = \ker(M^p)$. Le résultat subsiste-t-il si on travaille dans $\mathbb{R}$?