# Diagonalisation – Rappels

Soient $E$ un $\mathbb{C}$-vectoriel de dimension finie et $T \in \mathscr{L}(E)$.

## Définitions

- $\lambda \in \mathbb{C}$ est une *valeur propre* de $T$ si $\exists x \in E \setminus \{0\}$ tel que $Tx = \lambda x$
- $\mathrm{sp}(T)$ = *spectre* de $T$ = ensemble des valeurs propres de $T$
- $x \in E$ est *vecteur propre* de $T$ de valeur propre $\lambda$ si $Tx = \lambda x$
- $E_\lambda$ = ensemble des vecteurs propres de $T$ de valeur propre $\lambda$ = *sous-espace propre* de $T$ associé à la valeur propre $\lambda = \{x \in E : Tx = \lambda x\} = \ker(T - \lambda \mathrm{id})$
- *multiplicité géométrique* de $\lambda = \dim E \geq 1$
- $T$ est *diagonalisable* s'il existe une base dans laquelle $T$ se représente par une matrice diagonale
- *polynôme caractéristique* de $T$: $\chi_T(\lambda) = \det(T - \lambda \mathrm{id}) = \det(A - \lambda I)$ si $A$ représente $T$ dans une base de $E$
- *multiplicité algébrique d'une valeur propre* $\lambda_0$ = multiplicité de $\lambda_0$ comme zéro de $\chi_T(\lambda)$

## Remarque

$T$ et toute matrice représentant $T$ ont exactement les mêmes valeurs propres.

## Propositions

- $T$ diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base de $E$ formée de vecteurs propres
- $\lambda_0$ valeur propre de $T \Leftrightarrow \chi_T(\lambda_0) = 0$
- $\lambda$ valeur propre de $T$ de multiplicité algébrique $\mu \Rightarrow \dim E \leq \mu$
- des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont linéairement indépendants
- $T$ diagonalisable $\Leftrightarrow \dim E_\lambda = \mu_\lambda\ \forall \lambda$ valeur propre de $T$
- si toutes les valeurs propres de $T$ sont simples, alors $T$ est diagonalisable.

**Enoncé** : Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A$ est diagonalisable et calculer ses valeurs propres. En déduire qu'il existe une matrice $B$ telle que $B^3 = A$.

**Solution** : Le polynôme caractéristique de $A$ est

$$(-5-\lambda)(-2-\lambda) - 18 = \lambda^2 + 7\lambda - 8 = (\lambda - 1)(\lambda + 8).$$

Ainsi 1 et $-8$ sont deux valeurs propres simples et $A$ est diagonalisable. Il existe donc une matrice inversible $S$ telle que

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Posons $B = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} S^{-1}$. Il vient

$$B^3 = \left( S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} S^{-1} \right)^3 = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^3 S^{-1} = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} S^{-1} = A$$

d'où la conclusion.

**Exercice.** Diagonaliser si possible la matrice suivante:

$\exists ?\, S \in \mathbb{C}^3_3$ inv. t.q. $S^{-1} A S = \Delta$ ← mat diag

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Recherche des v.p. de $A$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 4 & -1 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 \qquad (\text{mat. } \Delta \text{ sup.}).$$

Son unique v.p. est $0$ de mult. algébrique 3.

## Recherche de $E_0$

On a

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \iff v \in \operatorname{Ker}(A - 0I) \iff (A - 0I).v = 0 \iff Av = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 4y - z = 0 \\ 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff y = z = 0.$$

Donc $E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\} = \left\rangle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{base}} \right\langle$

$\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ l.i.

D'où $\dim E_0 = 1 < 3$.

On en tire que $A$ n'est pas diagonalisable.

**Exercice.** Diagonaliser si possible la matrice suivante:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Recherche des v.p. de $B$</u>

$$\det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{4} C_i}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 4-\lambda & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{i=2,3,4}{\overset{L_i \leftarrow L_i - L_1}{=}} (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda).(-\lambda^3)$$

Les v.p. sont $0$ de mult. alg. $\underset{\mu_0}{\underset{\shortparallel}{3}}$ et $4$ de mult. alg. $\underset{\mu_4}{\underset{\shortparallel}{1}}$.

<u>Recherche de $E_0$</u>

On a
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x+y+z+t=0 \iff t=-x-y-z.$$

D'où $E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -x-y-z \end{pmatrix} : x,y,z \in \mathbb{C} \right\} = \rangle \underbrace{\overset{\text{l.i.}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}_{\text{base}} \langle$ et $\dim E_0 = 3 = \mu_0$

<u>Recherche de $E_4$</u>

On a $1 \leq \dim E_4 \leq \mu_4 = 1$, donc $\dim E_4 = \mu_4 = 1$. On a donc $\dim E_0 = \mu_0$ & $\dim E_4 = \mu_4$, d'où $B$ est diagonalisable.

Cherchons une base de $E_4$.

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_4 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \\ 4t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+y+z+t=4x \\ x+y+z+t=4y \\ x+y+z+t=4z \\ x+y+z+t=4t \end{cases} \iff \begin{cases} x=y \\ x=z \\ x=t \\ 4x=4x \end{cases} \iff x=y=z=t.$$

Donc $E_4 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle$.

Finalement, la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est t.q. $S^{-1}BS = \operatorname{diag}(0\ 0\ 0\ 4)$.
($S$ diagonalise $B$).

**Exercice.** Diagonaliser si possible la matrice suivante:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

## Recherche des v.p. de $C$

$$\det(C-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & -1 & -1 \\ 6-\lambda & 4-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (6-\lambda).\left[(2-\lambda).(16-8\lambda+\lambda^2-4) - (8-2\lambda+4) + (-4-8+2\lambda)\right]$$

$$= (6-\lambda).\left[24-16\lambda+2\lambda^2-12\lambda+8\lambda^2-\lambda^3-12+2\lambda-12+2\lambda\right]$$

$$= (6-\lambda).(-\lambda^3+10\lambda^2-24\lambda) = \lambda(\lambda-6)(\lambda^2-10\lambda+24)$$

$\Delta = 100 - 4.24 = 4$

$\lambda = \frac{10 \pm 2}{2} = 4$ ou $6$

$$= \lambda.(\lambda-6)^2.(\lambda-4).$$

Les v.p. sont 6 de mult. alg. $2 = \mu_6$ ; 0 de mult. alg. $1 = \mu_0$ et 4 de mult. alg. $1 = \mu_4$.

## Recherche de $E_6$

On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_6 \iff \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \\ 6z \\ 6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} -2x+2y-z-t=0 \\ \cancel{2x-2y+z+t=0} \\ -x+y-2z-2t=0 \\ \cancel{-x+y-2z-2t=0} \end{cases} \iff \begin{cases} 3z+3t=0 \\ -x+y-2z-2t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=-t \\ x=y \end{cases}$$

D'où $E_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ -t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, x,t \in \mathbb{C} \right\} = \rangle \overset{\text{l.i.}}{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base}}} \langle$

et $\dim E_6 = 2 = \mu_6$.

Comme $1 \leq \dim E_0 \leq \mu_0 = 1$ et $1 \leq \dim E_4 \leq \mu_4 = 1$, on a aussi $\dim E_0 = \mu_0$ et $\dim E_4 = \mu_4$. On en tire que $C$ est diagonalisable.

Cherchons des bases de $E_0$ et $E_4$.

## Recherche de $E_0$

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y-z-t=0 \\ 2x+4y+z+t=0 \\ -x+y+4z-2t=0 \\ -x+y-2z+4t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y-z-t=0 \\ 6x+6y=0 \\ -x+y+4z-2t=0 \\ 6z-6t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=t \\ 2x-2z=0 \\ -2x+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-y=z=t.$$

D'où $E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \\ x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C} \right\} = \Big\rangle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base}} \Big\langle$

## Recherche de $E_4$

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-z-t=0 \\ 2x+z+t=0 \\ -x+y-2t=0 \\ -x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=0 \\ 2x+z+t=0 \\ -2t+2z=0 \\ -x+y-2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x=y \\ z=t \\ 2x=-2z \\ 2y=2z \end{cases} \Leftrightarrow -x=y=z=t.$$

D'où $E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \\ -x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C} \right\} = \Big\rangle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{base}} \Big\langle$

## Conclusion

La matrice

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalise $C$ et on a

$$S^{-1} C S = \mathrm{diag}(0, 4, 6, 6).$$

**Exercice.** Pour quelle(s) valeur(s) du complexe $\alpha$, la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha & -\alpha \\ -2 & -\alpha & 2 \\ -1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

## Recherche des v.p. de M

$$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 2\alpha & -\alpha \\ -2 & -\alpha-\lambda & 2 \\ -1 & 2\alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1+C_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & -\alpha-\lambda & 2 \\ -\lambda & 2\alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3-L_1}{=} -\lambda . \begin{vmatrix} 1 & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & -\alpha-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda+\alpha \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda . (-\alpha-\lambda) . (1-\lambda+\alpha) = \lambda(\lambda+\alpha).(1+\alpha-\lambda).$$

Les v.p. de M sont $0, -\alpha$ et $1+\alpha$. Quelles sont leurs multiplicités?

### Cas 1: $0=-\alpha$ ($\equiv \alpha=0$)

Les v.p. sont $0$ avec $\mu_0=2$ et $1$ avec $\mu_1=1$. On a $1 \leq \dim E_1 \leq \mu_1 = 1$, donc $\dim E_1 = \mu_1$. Cherchons $E_0$. On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0=0 \\ -2x+2z=0 \\ -x+z=0 \end{cases} \iff z=x.$$

D'où

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \middle| \, x,y \in \mathbb{C} \right\} = \Big\rangle \underbrace{\overset{\text{l.i.}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}_{\text{base}} \Big\langle \text{ et } \dim E_0 = 2 = \mu_0.$$

On en tire que M est diagonalisable.

### Cas 2: $0=1+\alpha$ ($\equiv \alpha=-1$)

Les v.p. sont $0$ avec $\mu_0=2$ et $1$ avec $\mu_1=1$. Cherchons $E_0$. On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \iff \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x-2y+z=0 \\ -2x+y+2z=0 \\ -x-2y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=x+2y \\ 5y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ z=x \end{cases}.$$

D'où

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{C} \right\} = \Big\rangle \underbrace{\overset{\text{l.i.}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{\text{base}} \Big\langle \text{ et } \dim E_0 = 1 < 2 = \mu_0.$$

On en tire que M n'est pas diagonalisable.

### Cas 3: $-\alpha = 1+\alpha$ ($\equiv \alpha = -1/2$)

Les v.p. sont $0$ avec $\mu_0=1$ et $1/2$ avec $\mu_{1/2}=2$. Cherchons $E_{1/2}$. On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\frac{1}{2}} \iff \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 \\ -2 & 1/2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 \\ y/2 \\ z/2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x-y+\frac{1}{2}z=0 \\ -2x+2z=0 \\ -x-y+\frac{1}{2}z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=\frac{-1}{2}x \end{cases}$$

D'où $E_{\frac{1}{2}} = \big\rangle \underbrace{\overset{l.i.}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{base} \big\langle$ et $\dim E_{\frac{1}{2}} = 1 < 2 = \mu_{\frac{1}{2}}$.

On en tire que M n'est pas diagonalisable.

Cas 4 : $\alpha \notin \{-1 ; -1/2 ; 0\}$

Les v.p. distinctes de M sont $0, -\alpha$ et $1+\alpha$ et elles sont toutes de multiplicité algébrique 1. Donc M est diagonalisable.

Conclusion

Finalement, M est diagonalisable si $\alpha \notin \{-1 ; -1/2\}$.

**Exercice.** Pour quelle(s) valeur(s) du complexe $\alpha$, la matrice

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 2\alpha & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

## Recherche des v.p. de $N$

$$\det(N-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2\alpha & 3 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 2\alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2\alpha & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 2-\lambda & 2\alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2\alpha & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2(-2-\lambda).$$

Les v.p. sont $2$ avec $\mu_2 = 2$ et $-2$ avec $\mu_{-2} = 1$.

## Recherche de $E_2$

On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{pmatrix} -1 & 2\alpha & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -3x + 2\alpha y + 3z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ x + 2\alpha y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ 2\alpha y = 0 \end{cases}.$

### Cas 1 : $\alpha = 0$

Alors

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{C} \right\} = \rangle \underbrace{\overset{\text{l.i.}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}_{\text{base}} \langle \quad \text{et} \quad \dim E_2 = 2 = \mu_2.$$

Comme $-2$ est une v.p. simple, on trouve que $N$ est diagonalisable.

### Cas 2 : $\alpha \neq 0$

Alors

$E_2 = \rangle \underbrace{\overset{\text{l.i.}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{\text{base}} \langle$ et $\dim E_2 = 1 < 2 = \mu_2$, donc $N$ n'est pas diagonalisable.

## Conclusion

Finalement, $N$ est diagonalisable si $\alpha = 0$.

**Enoncé** : Déterminer si les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

**Solution** : Les deux matrices ont le même polynôme caractéristique $(1-\lambda)(2-\lambda)^2$. Déterminons pour chaque matrice, le sous-espace propre associé à la valeur propre 2. Pour la matrice $A$, il vient

$$AX = 2X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2z \\ y & = & -3z \\ z & = & z \end{array} \right. .$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 pour $A$ est donc la droite vectorielle engendrée par $(2,-3,1)$. En particulier, A n'est pas diagonalisable. Pour $B$, il vient

$$BX = 2X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & y \\ z & = & -y \end{array} \right. .$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est donc le plan engendré par les deux vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,1,-1)$. En particulier, la dimension de ce sous-espace propre est égale à la multiplicité de 2 comme racine du polynôme caractéristique et $B$ est diagonalisable. Ceci permet de conclure que $A$ et $B$ ne sont pas semblables. En effet, si ils l'étaient, alors $A$ serait semblable à une matrice diagonale car $B$ l'est et que la relation de similitude est transitive. Or cela impliquerait que $A$ est diagonalisable alors que ce n'est pas le cas.

**Enoncé** : Soit $A$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser $A$ et en déduire toutes les matrices $M$ qui commutent avec $A$.

**Solution** : On vérifie sans difficulté que $A$ est diagonalisable puisque son polynôme caractéristique est donné par $-(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$, dont toutes les racines sont simples. Ainsi $A = S\mathrm{diag}(1, 2, 3)S^{-1}$ où

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Concernant la seconde question, on va commencer par déterminer les matrices $N = (n_{i,j})$ qui commutent avec $D = \mathrm{diag}(1, 2, 3)$. On remarque que

$$ND = \begin{pmatrix} 1n_{1,1} & 2n_{1,2} & 3n_{1,3} \\ 1n_{2,1} & 2n_{2,2} & 3n_{2,3} \\ 1n_{3,1} & 2n_{3,2} & 3n_{3,3} \end{pmatrix} \text{ et } DN = \begin{pmatrix} 1n_{1,1} & 1n_{1,2} & 1n_{1,3} \\ 2n_{2,1} & 2n_{2,2} & 3n_{2,3} \\ 3n_{3,1} & 3n_{3,2} & 3n_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Pour que $ND = DN$, il est donc nécessaire et suffisant que $N$ soit une matrice diagonale $\mathrm{diag}(a, b, c)$. Ensuite, on remarque que si $M$ commute avec $A$, alors

$$SDS^{-1}M = MSDS^{-1} \Longleftrightarrow (S^{-1}MS)D = D(S^{-1}MS).$$

Autrement dit, $M$ commute avec $A$ si et seulement si $S^{-1}MS$ commute avec $D$, donc si et seulement si $S^{-1}MS = \mathrm{diag}(a, b, c)$. Après calcul de $S^{-1}$, on trouve que $M$ est de la forme

$$M = S\mathrm{diag}(a, b, c)S^{-1} = \begin{pmatrix} 2b - c & -a + 2b - c & \frac{a-c}{2} \\ -b + c & a - b + c & \frac{-a+c}{2} \\ 2c - 2b & -2b + c & c \end{pmatrix}.$$

**Enoncé** : Soit $A$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculer $A^2$ et en déduire une relation simple liant $A^2, A$ et $I_4$.
- En déduire que $A$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
- Diagonaliser $A$.

**Solution** : On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

d'où $A^2 = 2A + 3I_4$. Ceci montre que le polynôme $X^2 - 2X - 3$ est un polynôme annulateur de $A$. C'est même le polynôme minimum de $A$ puisqu'aucun polynôme du premier degré $aX - b$ n'annule $A$. Le polynôme minimum de $A$, à savoir $X^2 - 2X - 3 = (X+1)(X-3)$ n'a que des zéros simples, donc $A$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont $-1$ et $3$. Concernant le sous-espace propre associé à $-1$ il vient

$$\begin{aligned} AX = -X \quad & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y+z+t & = & -x \\ x+z+t & = & -y \\ x+y+t & = & -z \\ x+y+z & = & -t \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow \quad x+y+z+t = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y-z-t \\ y & = & y \\ z & = & z \\ t & = & t. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, $-1$ est une valeur propre de multiplicité géométrique 3, et une base de l'espace propre associé est donnée par les vecteurs $(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0)$ et $(-1, 0, 0, 1)$. Pour déterminer l'espace propre associé à la valeur propre 3, dont on sait désormais qu'il est de dimension 1, on peut résoudre $AX = 3X$. On peut aussi remarquer que la somme de chaque ligne de la matrice fait 3. Ainsi, le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ est vecteur propre de $A$ pour la valeur propre 3 et il constitue une base de l'espace propre associé à la valeur propre 3.

**Exercice** (Examen juin 2010)**.** Diagonaliser, si possible, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si elle est diagonalisable, fournir explicitement une matrice $S$ et la matrice diagonale $S^{-1}AS$ correspondante.

Recherche des v.p.

Polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ \cancel{-1} & 2-\lambda & \cancel{-1} \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) . \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 . (3-\lambda).$$

Les v.p. sont 2 avec $\mu_2 = 2$ et 3 avec $\mu_3 = 1$.

Recherche de $E_2$ (espace propre associé à 2)

On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 0 \\ -x - z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff x = z = 0.$

D'où $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{C} \right\} = \rangle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{base}} \langle$ $\quad \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ l.i.

On en tire que $\dim E_2 = 1 < 2 = \mu_2$, donc $A$ n'est pas diagonalisable.

**Exercice** (Examen juin 2010). Diagonaliser, si possible, la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si elle est diagonalisable, fournir explicitement une matrice $S$ et la matrice diagonale $S^{-1}BS$ correspondante.

## Recherche des v.p.

Polynôme caractéristique :

$$\chi_B(\lambda) = \det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ \cancel{-3} & \cancel{1} & 2-\lambda & \cancel{-2} \\ -1 & 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_1 \leftarrow C_1+C_2-C_3}{=} (2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ -(2-\lambda) & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1+L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2+L_3}}{=} (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \\ -1 & \cancel{1} & \cancel{2-\lambda} \end{vmatrix} = -(2-\lambda)^2\cdot(-1)\cdot(3-\lambda)^2$$

$$= (2-\lambda)^2(3-\lambda)^2.$$

Les v.p. sont 2 avec $\mu_2 = 2$ et 3 avec $\mu_3 = 2$.

## Recherche de $E_2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow (B-2I)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+t=0 \\ x+t=0 \\ -3x+y-2t=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ t=-x \end{cases}$$

et on a

$$E_2 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ x \\ z \\ -x \end{pmatrix} \middle|\, x,z \in \mathbb{C}\right\} = \underbrace{\overset{\text{l.i.}}{\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \langle}}_{\text{base}} \text{ et } \dim E_2 = 2 = \mu_2.$$

## Recherche de $E_3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+t=0 \\ \cancel{x-y+t=0} \\ -3x+y-z-2t=0 \\ \cancel{-x+y-t=0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+t \\ z = 3x+2t-x-t = 2x+t \end{cases}$$

et on a

$$E_3 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ x+t \\ 2x+t \\ t \end{pmatrix} \middle|\, x,t \in \mathbb{C}\right\} = \underbrace{\overset{\text{l.i.}}{\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle}}_{\text{base}} \text{ et } \dim E_3 = 2 = \mu_3.$$

On en tire que $B$ est diagonalisable.

La matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalise B et on a

$$S^{-1} B S = \mathrm{diag}(2, 2, 3, 3).$$

**Exercice** (Examen juin 2013). Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

À quelles conditions sur les paramètres $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, la matrice $M$ est-elle diagonalisable ? Quand $M$ est diagonalisable, fournir une matrice inversible $S$ telle que $S^{-1}MS$ soit diagonale.

<u>Recherche des v.p.</u>

On a $\det(M-\lambda I) = (1-\lambda)^2(-1-\lambda)^2 = (1-\lambda)^2(1+\lambda)^2$.

Les v.p. sont $1$ avec $\mu_1 = 2$ et $-1$ avec $\mu_{-1} = 2$.

<u>Recherche de $E_1$</u>

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -2 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha y + \beta z + \gamma t = 0 \\ \alpha z + \beta t = 0 \\ -2z + \alpha t = 0 \\ -2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ z = 0 \\ \alpha y = 0 \end{cases} \quad (*)$$

* <u>Si $\alpha = 0$</u> $(*) \Leftrightarrow z = t = 0$ et $E_1 = \Big\rangle \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\text{l.i.}}}_{\text{base}} \Big\langle$ d'où $\dim E_1 = 2 = \mu_1$.

* <u>Si $\alpha \neq 0$</u> $(*) \Leftrightarrow y = z = t = 0$ et $E_1 = \Big\rangle \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\text{l.i.}}}_{\text{base}} \Big\langle$, d'où $\dim E_1 = 1 < \mu_1$, donc $M$ n'est pas diagonalisable.

Supposons $\alpha = 0$.

<u>Recherche de $E_{-1}$</u>

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 2 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \beta z + \gamma t = 0 \\ 2y + \beta t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\beta}{2} z - \frac{\gamma}{2} t \\ y = -\frac{\beta}{2} t \end{cases}$$

D'où

$$E_{-1} = \Big\rangle \begin{pmatrix} -\beta/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\gamma/2 \\ -\beta/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\langle = \Big\rangle \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\gamma \\ -\beta \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}^{\text{l.i. } \forall \beta, \gamma \in \mathbb{R}}}_{\text{base}} \Big\langle \text{ et } \dim E_{-1} = 2 = \mu_{-1}.$$

<u>Conclusion</u>

$M$ est diagonalisable ssi $\alpha = 0$. Dans ce cas, la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta & -\gamma \\ 0 & 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ diagonalise $M$ et on a $S^{-1}MS = \operatorname{diag}(1, 1, -1, -1)$.

**Enoncé** : Soit $A$ une matrice complexe diagonalisable de taille $n \times n$ et soit $B$ la matrice définie par

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right).$$

Donner les valeurs propres de $B$ et la dimension des sous-espaces propres correspondants. A quelle condition $B$ est-elle diagonalisable?

**Solution** : Soit $X = \binom{x}{y}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$BX = \lambda X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} Ay & = & \lambda x \\ x & = & \lambda y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} Ay & = & \lambda^2 y \\ x & = & \lambda y \end{array} \right. .$$

Ainsi, $\lambda$ est valeur propre de $B$ si et seulement si $\lambda^2$ est valeur propre de $A$, et $X = \binom{x}{y}$ est vecteur propre de $B$ pour la valeur propre $\lambda$ si et seulement si $x = \lambda y$ et $y$ est vecteur propre de $A$ pour la valeur propre $\lambda^2$. Pout tout $\alpha \in \mathbb{C}$ posons $E_\alpha = \ker(A - \alpha I_n)$ et $F_\alpha = \ker(B - \alpha I_{2n})$. Soit $\mu = \lambda^2$. Si $(y_1, \ldots, y_k)$ est une base de $E_\mu$, alors en posant $X_i = \binom{\lambda y_i}{y_i}$, $(X_1, \ldots, X_k)$ est clairement une base de $F_\lambda$. Puisque $A$ est diagonalisable, on sait que

$$\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\mu_i}) = n,$$

où $\mu_1, \ldots, \mu_p$ sont les valeurs propres de $A$. Si $\mu_i \neq 0$ pour tout $i$, chaque $\mu_i$ admet deux racines carrés complexes distinctes $\lambda_i, \lambda_i'$, et on a

$$\sum_{i=1}^{p} \dim(F_{\lambda_i}) + \sum_{i=1}^{p} \dim(F_{\lambda_i'}) = 2 \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\mu_i}) = 2n.$$

Donc $B$ est diagonalisable. En revanche si un des $\mu_i$ est égal à 0, il faut soustraire $\dim(E_{\mu_i})$ à la ligne précédente. La somme des dimensions est donc strictement inférieure à $2n$ et $B$ n'est pas diagonalisable. On en conclut que $B$ est diagonalisable si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de $A$.

**Enoncé** : Pour $n \geq 1$, soit

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$ son polynôme caractéristique.

- Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a
$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).$$
Calculer $P_1$ et $P_2$.
- Pour tout $x \in ]-2, 2[$, on pose $x = 2\cos\alpha$ avec $\alpha \in ]0, \pi[$. Démontrer que
$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin\alpha}.$$
- En déduire que $A_n$ est diagonalisable.

**Solution** : En développant $P_n$ selon la première colonne via la règle des mineurs, on trouve

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) + \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & x & -1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Il suffit ensuite de développer selon la première ligne pour obtenir l'égalité

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).$$

Par ailleurs, on calcule aisément que $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2 - 1$. Concernant le second point, procédons par récurrence double. Le résultat est vrai pour $n = 1$ car $2\cos(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(\alpha)}$ et pour $n = 2$ car

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(2\alpha) \\ &= 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin(\alpha) \\ &= \sin(\alpha)\left((2\cos\alpha)^2 - 1\right). \end{aligned}$$

Si le résultat est vrai aux rang $n-2$ et $n-1$, alors en utilisant le résultat du premier point, on a

$$\begin{aligned} \sin(\alpha)P_n(x) &= (2\cos\alpha)\sin(\alpha)P_{n-1}(x) - \sin(\alpha)P_{n-2}(x) \\ &= 2\cos\alpha\sin(n\alpha) - \sin((n-1)\alpha) \\ &= \sin((n+1)\alpha) + \sin((n-1)\alpha) - \sin((n-1)\alpha) \\ &= \sin((n+1)\alpha) \end{aligned}$$

ce qui prouve que le résultat est encore vrai au rang $n$. Enfin, concernant la dernier point : L'équation $\sin((n+1)\alpha) = 0$ admet $n$ racines dans l'intervalle $]0, \pi[$ qui sont les réels

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Par bijectivité de la fonction cos sur l'intervalle $]0, \pi[$, les $n$ réels $x_k = 2\cos(\alpha_k)$, $k = 1, \ldots, n$ sont distincts et sont des racines de $P_n$, qui est un polynôme de degré $n$. Donc toutes ses racines sont simples. Puisqu'il s'agit du polynôme caractéristique de $A_n$ (à un signe près), on en déduit que $A_n$ est diagonalisable.

**Enoncé** : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de la matrice $A$. Est-elle diagonalisable?
- Plus généralement, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

**Solution** : Toutes les colonnes étant identiques, et la matrice n'étant pas la matrice nulle, elle est de rang 1. Vu le théorème du rang, ceci implique que $\dim(\ker(A)) = 3$. Autrement dit, 0 est valeur propre de $A$ et la dimension de l'espace propre associé à 0 est égale à 3. Comme la multiplicité algébrique est au moins égale à la multiplicité géométrique et que le polynôme caractéristique de $A$ étant de degré 4, on en déduit qu'il est de la forme $x^3(\lambda - x)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. La somme des valeurs propres étant égale à la trace de la matrice, on en déduit que $\lambda = 10$. Ainsi, il y a égalité entre les multiplicités algébriques et géométriques et $A$ est diagonalisable.

Le cas général se traite de même. Le polynôme caractéristique est nécessairement de la forme $x^{n-1}(\lambda - x)$ où $n$ est la dimension de $A$. Si $\lambda$ (qui est la trace de $A$) est non-nul, alors la matrice est diagonalisable. Sinon la multiplicité algébrique de 0 est $n$ alors que sa multiplicité géométrique est $n-1$ et $A$ n'est pas diagonalisable. En conclusion, une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace n'est pas nulle.

**<u>Enoncé</u>** : Chercher les valeurs propres de l'opérateur

$$T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), f \mapsto Df$$

ainsi que les sous-espaces propres associés.

**<u>Solution</u>** : Une fonction $f$ est un vecteur propre de $T$ associé à la valeur propre $\lambda$ si et seulement si $Df = \lambda f$ autrement dit si et seulement si $f(x) = C\exp(\lambda x)$. Ainsi, tous les réels $\lambda$ sont des valeurs propres et l'espace propre $E_\lambda$ associé est engendré par $x \mapsto \exp(\lambda x)$. En particulier, il est de dimension 1.

**Exercice.** Chercher les valeurs propres de l'opérateur

$$T\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n,\ p \mapsto (z^2-1)D^2p(z) + (2z+1)Dp(z)$$

après avoir vérifié que ce dernier est linéaire.

## a) Linéarité

Soient $P, Q \in \mathcal{P}_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} T(\alpha P+\beta Q) &= (z^2-1)D^2(\alpha P+\beta Q)(z) + (2z+1)D(\alpha P+\beta Q)(z) \\ &= (z^2-1)(\alpha D^2P(z)+\beta D^2Q(z)) + (2z+1)(\alpha DP(z)+\beta DQ(z)) \\ &= \alpha(z^2-1)D^2P(z) + \beta(z^2-1)D^2Q(z) + \alpha(2z+1)DP(z) + \beta(2z+1)DQ(z) \\ &= \alpha T(P) + \beta T(Q). \end{aligned}$$

Remarque: $\forall P \in \mathcal{P}_n$, on a $T(P) \in \mathcal{P}_n$, car

* $D^2P(z)$ pol. de deg. $n-2 \Rightarrow (z^2-1)D^2P(z) \in \mathcal{P}_n$
* $DP(z)$ pol. de deg. $n-1 \Rightarrow (2z+1)DP(z) \in \mathcal{P}_n$.

## b) Valeurs propres

Représentation matricielle de $T$ dans la base canonique $1, X, X^2, \dots, X^n$:

. $T(1)(z) = 0$ . $T(X)(z) = (2z+1)$

. $\forall k \in \{2, \dots, n\}$, $T(X^k)(z) = (z^2-1)k(k-1)z^{k-2} + (2z+1).k z^{k-1}$

$$\begin{aligned} &= k(k-1)z^k + 2kz^k + kz^{k-1} - k(k-1)z^{k-2} \\ &= k(k+1)z^k + k.z^{k-1} - k(k-1)z^{k-2}. \end{aligned}$$

D'où

$$A = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cccccccc} T(1) & T(X) & & & \cdots & T(X^k) & \cdots & T(X^n) \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -6 & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & 3 & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 12 & & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -k(k-1) & & \vdots \\ \vdots & & & & & k & & \vdots \\ \vdots & & & & & k(k+1) & & \vdots \\ \vdots & & & & & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & -n(n-1) \\ \vdots & & & & & \vdots & & n \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & \cdots\ 0 & n(n+1) \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \\ X^{k-2} \\ X^{k-1} \\ X^k \\ \vdots \\ X^{n-2} \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array}$$

C'est une matrice triangulaire supérieure. On voit clairement que

$sp(T) = \{k(k+1) : k = 0, \dots, n\}$ car $\det(A - \lambda I)$ est annulé par $k(k+1)$ $\forall k \in \{0, \dots, n\}$.

**Exercice.** Chercher les valeurs propres de l'opérateur

$$S\colon \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_n,\ p \mapsto \frac{1}{x-1}\int_1^x p(t)dt$$

après avoir vérifié que ce dernier est linéaire. Lorsque $n = 2$, trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{R}_2$ telle que la matrice qui représente $S$ dans $\mathcal{B}$ soit diagonale.

## a) Sens

$S : \mathcal{R}_m \to \mathcal{R}_m$ car si $p \in \mathcal{R}_m$, alors $\int_1^x p(t)\,dt$ est un polynôme de degré $\leq m+1$, et possède 1 comme zéro. D'où $\int_1^x p(t)\,dt = (x-1)\,q(x)$ avec $\deg q \leq m$. Finalement, $S(p) = q$, d'où la conclusion.

## b) Linéarité

Soient $p, q \in \mathcal{R}_m$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a

$$S(\alpha p+\beta q)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x (\alpha p+\beta q)(t)\,dt = \alpha S(p)(x) + \beta S(q)(x)$$ car intégrale linéaire.

## c) Valeurs propres

Représentation matricielle de $S$ dans la base canonique $1, X, X^2, \ldots, X^m$.

- $S(1)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x 1\,dt = \frac{1}{x-1}\cdot[t]_1^x = \frac{x-1}{x-1} = 1.$

- $S(X)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x t\,dt = \frac{1}{x-1}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x = \frac{x^2-1}{2(x-1)} = \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$

- $\forall\, 2 \leq k \leq m,\ S(X^k)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x t^k\,dt = \frac{1}{x-1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_1^x = \frac{x^{k+1}-1}{(k+1)(x-1)} \overset{*}{=} \frac{1}{k+1}\,(x^k + x^{k-1} + \ldots + x + 1)$

$*$ On remarque que c'est une progression géométrique: $\frac{x^{k+1}-1}{x-1} = \sum_{j=0}^{k} x^j$
ou on fait Horner $x^{k+1}-1 = (x-1)(x^k + x^{k-1} + \ldots + 1)$.

D'où

$$\begin{pmatrix}
1 & 1/2 & \cdots & 1/(k+1) & \cdots & 1/(m+1) \\
0 & 1/2 & \cdots & 1/(k+1) & \cdots & 1/(m+1) \\
\vdots & 0 & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & 1/(k+1) & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & 0 & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1/(m+1)
\end{pmatrix}$$

représente $S$ et

$$sp(S) = \left\{\frac{1}{k+1} : k = 0, \ldots, m\right\}.$$

d) $m = 2$

Posons $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

On a $sp(A) = \{1, 1/2, 1/3\}$ et toutes ces v.p. sont simples, donc $A$ est diagonalisable. Chercherons une base de chaque espace propre.

$E_1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - 1.I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y/2 + z/3 = 0 \\ -y/2 + z/3 = 0 \\ -2z/3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0.$$

Donc $E_1 = \left\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\langle$.

$E_{1/2}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{1/2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x/2 + y/2 + z/3 = 0 \\ z/3 = 0 \\ -z/6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \end{cases}.$$

Donc $E_{1/2} = \left\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\langle$.

$E_{1/3}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{1/3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x/3 + y/2 + z/3 = 0 \\ y/6 + z/3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 2z = 0 \\ y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x = z \end{cases}.$$

Donc $E_{1/3} = \left\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\langle$.

On en tire que dans la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, l'opérateur $S$ se représente matriciellement par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

**Enoncé** : Soit $T$ l'endomorphisme de $\mathcal{R}_n$ défini par $T(P)(x) = x^n P(1/x)$. Démontrer que $T$ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{R}_n$, déterminer ses valeurs propres et une base de vecteurs propres associés.

**Solution** : Il est clair que $T^2(P) := (T \circ T)(P) = P$ pour tout polynôme $P$. Soit à présent un polynôme non-nul $P$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T(P) = \lambda P$. En appliquant $T$ une nouvelle fois on trouve $P = \lambda T(P)$. Ainsi $P = \lambda^2 P$. Comme $P$ est non-nul, on en déduit que $\lambda = \pm 1$. Les seules valeurs propres possibles sont donc 1 et $-1$. Séparons à présent l'étude en deux cas.

1. Si $n = 2p+1$ : Pour $k = 0, \ldots, p$ posons

$$P_k(x) = x^k + x^{n-k} \text{ et } Q_k(x) = x^k - x^{n-k}.$$

   Il est clair que les familles $(P_k)$ et $(Q_k)$ sont libres (car les polynômes sont à degrés étagés). De plus l'espace vectoriel engendré par $(P_k)$ (resp. $(Q_k)$) est constitué de vecteurs propres de $T$ pour la valeurs propre 1. (resp. $-1$.) La dimension de ces deux sous-espaces est $p+1$. Comme

$$(p+1) + (p+1) = 2p+2 = n+1 = \dim(\mathcal{R}_n)$$

   on en déduit que $T$ est diagonalisable.

2. Si $n = 2p$ : Le raisonnement est identique au point précédente à la différence que $Q_p$ doit à présent être retiré puisqu'il est nul. Cependant on a toujours

$$(p+1) + p = 2p+1 = n+1 = \dim(\mathcal{R}_n)$$

   et $T$ est diagonalisable.

**Enoncé** : Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites à coefficients complexes, et $T$ l'endomorphisme de $E$ qui à une suite $(u_n)$ associe la suite $(v_n)$ définie par $v_0 = u_0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $T$.

**Solution** : Soit $(u_n)$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$. Alors on a $u_0 = \lambda u_0$ et pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{u_n + u_{n-1}}{2} = \lambda u_n \iff (1 - 2\lambda)u_n = -u_{n-1}.$$

On distingue alors 3 cas.

Si $\lambda = 1$ alors on a $u_0 = u_0$ (qui n'implique plus rien sur $u_0$), puis pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = u_{n-1}$. Donc $u_n$ est une suite constante. Réciproquement, toute suite constante est bien vecteur propre de $T$ pour la valeur propre 1. On en déduit que 1 est une valeur propre de $T$ dont l'espace propre associé est constitué par les suites constantes.

Si $\lambda = 1/2$ alors le système devient $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1, u_{n-1} = 0$ ce qui implique que $u_n$ est la suite nulle et donc $1/2$ n'est pas valeur propre de $T$.

Dans tous les autres cas, le système devient $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$ :

$$u_n = \frac{1}{2\lambda - 1} u_{n-1}.$$

Ainsi, la suite $u_n$ est là-encore la suite nulle, et $\lambda$ n'est pas valeur propre. En conclusion, la seule valeur propre est 1, et les seuls vecteurs propres sont les suites constantes.

**Exercice.** Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathbb{C}_n^n$. Prouver que si les valeurs propres de $A$ sont simples et que $B$ commute avec $A$ alors $B$ est diagonalisable.

Si les v.p. de $A$ (notons-les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$) sont simples, alors $A$ est diagonalisable et $\exists\, S \in \mathbb{C}_n^n$ t.q. $S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: \Delta$.

On cherche $T \in \mathbb{C}_n^n$ t.q. $T^{-1}BT = \Delta'$ où $\Delta'$ est une matrice diagonale.

On a $AB = BA$. Or, $A = S\Delta S^{-1}$, d'où

$$S\Delta S^{-1}B = BS\Delta S^{-1} \quad \Big\} \; S^{-1} \dots S$$

$$\Rightarrow \Delta S^{-1}BS = S^{-1}BS\Delta.$$

Posons $\Delta' = S^{-1}BS$. Montrons que $S$ diagonalise aussi $B$, i.e. $S^{-1}BS = \Delta'$ est une matrice diagonale. On a $\Delta\Delta' = \Delta'\Delta$ par ce qui précède. On en tire que

$$(\Delta\Delta')_{ij} = (\Delta'\Delta)_{ij} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\Delta_{ik}}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ \lambda_i & \text{si } k = i \end{cases}} \Delta'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \Delta'_{ik} \underbrace{\Delta_{kj}}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ \lambda_j & \text{si } k = j \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i \Delta'_{ij} = \Delta'_{ij} \lambda_j$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_i - \lambda_j).\Delta'_{ij} = 0 \qquad \forall i,j \in \{1, \dots, n\}.$$

Or, si $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ car les v.p. sont simples. Donc, si $i \neq j$, on a

$$(\Delta\Delta')_{ij} = (\Delta'\Delta)_{ij} \Leftrightarrow \Delta'_{ij} = 0.$$

On en tire que $\Delta'$ est diagonale et donc que $B$ est diagonalisé par $S$.

**Enoncé** : Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère l'endomorphisme $\phi$ de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\phi(g) = f \circ g$.

- Démontrer que toute valeur propre de $f$ est une valeur propre de $\phi$ puis, si $\lambda$ est une valeur propre de $f$, déterminer $E_\lambda(\phi)$.
- En déduire que si $f$ est diagonalisable, alors $\phi$ est diagonalisable.

**Solution** : Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$. On a

$$\begin{aligned} g \in E_\lambda(\phi) &\iff \forall x \in E, f(g(x)) = \lambda g(x) \\ &\iff \forall x \in E,\ g(x) \in E_\lambda(f) \\ &\iff g(E) \subset E_\lambda(f). \end{aligned}$$

Donc, s'il existe au moins une application $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $g(E) \subset E_\lambda(f)$ alors $\lambda$ est valeur propre de $\phi$ et

$$E_\lambda(\phi) = \{g \in \mathcal{L}(E) : g(E) \subset E_\lambda(f)\}.$$

Une telle application existe puisque le projecteur canonique $p_\lambda : E \to E_\lambda$ convient. De ceci on déduit que $\dim(E_\lambda(\phi)) = \dim(E)\dim(E_\lambda(f))$. Ainsi si $f$ est diagonalisable on a

$$\sum_\lambda \dim(E_\lambda(f)) = \dim(E)$$

et donc

$$\sum_\lambda \dim(E_\lambda(\phi)) = \dim(E) \sum_\lambda \dim(E_\lambda(f)) = \dim(E)^2$$

et $\phi$ est également diagonalisable.

# Polynômes d'endomorphisme – Rappels

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-vectoriel.

**Théorème (Cayley-Hamilton):** Soit $T \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme ayant $\chi_T$ pour polynôme caractéristique. On a

$$\chi_T(T) = 0.$$

**Corollaire:** Soit $T \in \mathscr{L}(E)$. L'ensemble $I = \{P \in \mathbb{C}[z] | P(T) = 0\}$ est un idéal propre de $\mathbb{C}[z]$, appelé idéal annulateur de $T$.

**Définition:** Puisque $I = \{P \in \mathbb{C}[z] | P(T) = 0\}$ est un idéal propre d'un anneau principal, il existe un polynôme monique $\mathscr{M}_T$ tel que $I = \langle \mathscr{M}_T \rangle$. On l'appelle le *polynôme minimum* de $T$.

**Théorème:** Soit $T \in \mathscr{L}(E)$. Alors

- $\chi_T$ est un multiple de $\mathscr{M}_T$
- $\chi_T$ et $\mathscr{M}_T$ ont les mêmes zéros.

**Proposition:** Un endomorphisme $T$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimum ne possède que des zéros simples.

**Définition:** La *trace* d'une matrice carrée $n \times n$, $A = (a_{ij})$, est le nombre

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

**Proposition:** Soient $A \in \mathbb{C}_n^n$ une matrice dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de multiplicité algébrique $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Alors

$$\det A = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{\alpha_i} \qquad \& \qquad \mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i.$$

__Enoncé__ : Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathbb{R}_n^n$.

1. Démontrer que si $\omega$ est une valeur propre de $A$ de multiplicité $s$, alors $\overline{\omega}$ est une valeur propre de $A$ de multiplicité $s$.

2. On suppose que $A^3 - 3A - 4I_n = 0$. Montrer que $A$ est de déterminant strictement positif.

3. On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que $n$ est pair.

4. On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de $A$ est pair.

5. On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Démontrer que $\mathrm{tr}(A)$ est un entier négatif.

__Solution__ :

1. La matrice $A$ étant à coefficients réels, son polynôme caractéristique est également réel. Dès lors, ce résultat provient du résultat général concernant les racines des polynômes réels.

2. Etudions le polynôme $p(x) = x^3 - 3x - 4$. Sa dérivée s'annule en $-1$ et $1$ qui sont respectivement un max et un min local de $p$. On a de plus $p(-1) < 0$ et $p(1) < 0$. Ainsi $p$ est strictement négatif sur $]-\infty, 1]$ et strictement croissant sur $]1, +\infty[$. Donc il n'admet qu'une seule racine réelle $\alpha > 0$. Ainsi $p(x) = (x-\alpha)(x-\omega)(x-\overline{\omega})$, où $\omega$ est un complexe non réel. Comme $p$ est un polynôme annulateur de $A$, les valeurs propres de $A$ appartiennent à $\{\alpha, \omega, \overline{\omega}\}$. Notons $r$ la multiplicité de $\alpha$ et $s$ la multiplicité de $\omega$ (et donc d'$\overline{\omega}$ vu le point précédent.) Il vient
$$\det(A) = \alpha^r \omega^s \overline{\omega}^s = \alpha^r |\omega|^{2s} > 0,$$
d'où la conclusion.

3. Les racines du polynômes $p(x) = x^2 + x + 1$ sont $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Comme ce polynôme annule $A$, les valeurs propres de $A$ sont parmi les deux nombres complexes susmentionnés. Ainsi $\chi_A$ n'a aucune racine réelle et de ce fait ne peut pas être de degré impair. Comme le degré de $\chi_A$ est égal au nombre de ligne (et de colonnes) de $A$, on en conclut que $n$ est pair.

4. Considérons $f$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $A$. On a $f^3 + f^2 + f = 0$. En particulier, ceci implique que $\mathrm{im}(f)$ est stable par $f$. Notons $g$ la restriction de $f$ à $\mathrm{im}(f)$. Pour tout $y = f(x) \in \mathrm{im}(f)$ il vient
$$g^2(y) + g(y) + y = f^3(x) + f^2(x) + f(x) = 0.$$
Vu le point précédent la dimension du domaine de définition de $g$ doit être pair. Donc $\dim(\mathrm{im}(f)) = \mathrm{rg}(A)$ et pair.

5. On procède comme à la question 2. On a $p(x) = X^3 + X^2 + X = X(X-j)(X-j^2)$ où $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Donc les valeurs propres de $A$ sont parmi $\{0, j, j^2\}$. Si l'on note $r$ la multiplicité de 0 et $s$ la multiplicité de $j$ (donc de $j^2$) il vient
$$\mathrm{tr}(A) = r0 + s(j + j^2) = -s \in \mathbb{Z}^-.$$

**Exercice.** Soit $A = \text{diag}(A_1, \ldots, A_k)$ où les $A_i$ sont des matrices complexes carrées. Prouver que le polynôme minimum de $A$ est égal au ppcm de celui des $A_i$ pour $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Pour tout $P \in \mathbb{C}[z]$, on a $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$. On a

$$P(A) = a_0 + a_1 A + \ldots + a_m A^m.$$

Or,

$* \ A^l = (\text{diag}(A_1, \ldots, A_k))^l = \text{diag}(A_1^l, \ldots, A_k^l), \quad \forall l \geq 0$

$* \ cA = \text{diag}(cA_1, \ldots, cA_k), \quad \forall c \in \mathbb{C}.$

Donc $P(A) = \text{diag}(P(A_1), \ldots, P(A_k))$.

Par conséquent, $\forall P \in \mathbb{C}[z]$, on a

$$P(A) = 0 \iff P(A_i) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq k \qquad (*)$$

Soient $M$ le polynôme minimum de $A$ et $M_i$ le polynôme minimum de $A_i$ $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$.

- Montrons que $M \mid \text{ppcm}(M_1, \ldots, M_k)$.

  Comme $M_i(A_i) = 0$ $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, on a

  $$\text{ppcm}(M_1, \ldots, M_k)(A_i) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}.$$

  Vu $(*)$, on obtient $\text{ppcm}(M_1, \ldots, M_k)(A) = 0$. D'où, en appliquant la définition de $M$,

  $$M \mid \text{ppcm}(M_1, \ldots, M_k). \qquad (1)$$

- Montrons que $\text{ppcm}(M_1, \ldots, M_k) \mid M$.

  Comme $M(A) = 0$ et vu $(*)$, on a $M(A_i) = 0$ $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$.

  Par définition de $M_i$, $M_i \mid M$ $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$.

  Donc $\text{ppcm}(M_1, \ldots, M_k) \mid M$. $(2)$

Comme les polynômes $M$ et $\text{ppcm}(M_1, \ldots, M_k)$ sont unitaires et vu $(1)$ et $(2)$, on a

$$M = \text{ppcm}(M_1, \ldots, M_k).$$

**Exercice.** Soient $\alpha \in \mathbb{C}_0$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On désigne par $T$ l'application

$$T\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n,\ p \mapsto p(\alpha) + \alpha p'(\alpha)z + \frac{\alpha^2}{2}p''(\alpha)z^2.$$

1. Montrer que $T$ est linéaire.
2. Donner une représentation matricielle $M$ de la restriction de $T$ à $\mathcal{P}_2$ ainsi que son polynôme caractéristique.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha$ la matrice $M$ est-il diagonalisable ?
4. Déterminer le polynôme minimum de $M$.
5. Quel est le rang de $T$ ? Montrer que $\mathrm{im}(T) \oplus \ker(T) = \mathcal{P}_n$.
6. Donner le polynôme minimum et caractéristique de $T$.

**1.** $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$. En effet, $n \geq 2$, donc $\forall p \in \mathcal{P}_n$, $p'' \neq 0$ et $T(p)$ est un polynôme de degré au plus 2, donc $T(p) \in \mathcal{P}_n$.

- Soient $p, q \in \mathcal{P}_n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}
T(\lambda p + \mu q) &= (\lambda p + \mu q)(\alpha) + \alpha(\lambda p + \mu q)'(\alpha)z + \frac{\alpha^2}{2}(\lambda p + \mu q)''(\alpha)z^2 \\
&= \lambda p(\alpha) + \mu q(\alpha) + \lambda \alpha p'(\alpha)z + \mu \alpha q'(\alpha)z + \lambda\frac{\alpha^2}{2}p''(\alpha)z^2 + \mu\frac{\alpha^2}{2}q''(\alpha)z^2 \\
&= \lambda T(p) + \mu T(q). \text{ Ok.}
\end{aligned}$$

**2)** $T|_{\mathcal{P}_2} \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2)$. Endomorphisme $\rightsquigarrow$ on prend 1 base (au choix)

Base canonique de $\mathcal{P}_2$ : $1, z, z^2$. On a

$\cdot\ T(1) = 1$ $\quad\cdot\ T(z) = \alpha + \alpha z$ $\quad\cdot\ T(z^2) = \alpha^2 + 2\alpha^2 z + \alpha^2 z^2$.

D'où

$$M = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \alpha & 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ z \\ z^2 \end{array} \\
\begin{array}{ccc} T(1) & T(z) & T(z^2) \end{array} &
\end{array}$$

et $\chi_{T|_{\mathcal{P}_2}}(\lambda) = (1-\lambda)(\alpha-\lambda)(\alpha^2-\lambda)\,(= \det(M - \lambda I))$.

**3)** Les v.p. de $M$ sont $1, \alpha$ et $\alpha^2$. Multiplicité?

$1 = \alpha \rightsquigarrow 1$
$1 = \alpha^2 \rightsquigarrow -1$
$\alpha = \alpha^2 \rightsquigarrow 0 \leftarrow$ à rejeter

Cas 1 : $\alpha = 1$

La seule v.p. est 1 avec $\mu_1 = 3$. On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (M - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0.$$

D'où $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C} \right\} = \rangle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{base}} \langle$ et $\dim E_1 = 1 < 3 = \mu_1$, donc $M$ n'est pas diagonalisable.

Cas 2 : $\alpha = -1$

Les v.p. sont $1$ $(\mu_1 = 2)$ et $-1$ $(\mu_{-1} = 1)$. On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(M - I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -y+z=0 \\ -2y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z.$$

D'où $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{C} \right\} = \rangle \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\text{l.i.}}}_{\text{base}} \langle$ et $\dim E_1 = 2 = \mu_1$.

Comme $\dim E_{-1} = 1 = \mu_{-1}$, on en tire que $M$ est diagonalisable.

Cas 3 : $\alpha \notin \{-1 ; 1\}$

Les v.p. sont $1, \alpha, \alpha^2$ toutes distinctes et simples, donc $M$ est diagonalisable.

Conclusion

$M$ diagonalisable $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{C}_0 \setminus \{1\}$. Si $\alpha = 0$, la mat. est diagonale. Mais $\alpha \in \mathbb{C}_0$ ds l'énoncé.

4) Cas 1 : $\alpha = 1$

On a $\chi_M(\lambda) = (1-\lambda)^3$. Or, $\mathcal{M}_M \mid \chi_M$ et qu'ils ont les m. 0. ~~Donc~~ $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{M}_M(\lambda) = \lambda - 1 \quad \text{ou} \quad (\lambda-1)^2 \quad \text{ou} \quad (\lambda-1)^3$$

↳ pol. monique

* $\mathcal{M}_M(\lambda) \neq \lambda - 1$, car sinon $M$ serait diagonalisable.

$$\mathcal{M}_M(M) = 0 \quad \text{et} \quad M - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* On a

$$(M-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_M(M).$$

En conclusion, $\mathcal{M}_M(\lambda) = (\lambda - 1)^3 = \chi_M(\lambda)$.

Cas 2 : $\alpha = -1$

$\chi_M(\lambda) = (1-\lambda)^2(-1-\lambda)$. Comme $\mathcal{M}_M \mid \chi_M$ et qu'ils ont les m. 0, on a $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{M}_M(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+1) \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}_M(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1).$$

Sol. 1 : Puisque $M$ est diagonalisable, son polynôme minimum n'a que des zéros simples, donc $\mathcal{M}_M(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1) = \lambda^2 - 1$.

Sol. 2 : On a $(\lambda-1)(\lambda+1) = \lambda^2 - 1$ et $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

donc $M^2 - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M}_M(\lambda) = \lambda^2 - 1$.

Cas 3 : $\alpha \notin \{-1;1\}$

Alors $\chi_M(\lambda) = (1-\lambda)(\alpha-\lambda)(\alpha^2-\lambda)$ et les v.p. sont simples, donc

$$\mathcal{M}_M(\lambda) = (\lambda-1).(\lambda-\alpha).(\lambda-\alpha^2).$$

5) On a $rg(T) = \dim \operatorname{Im} T$. Or,

$\operatorname{Im} T = \{T(p) \mid p \in \mathcal{P}_n\} = \rangle T(1), T(z), T(z^2), \dots, T(z^n)\langle \subseteq \mathcal{P}_2$, car $T(p) \in \mathcal{P}_2 \ \forall p \in \mathcal{P}_n$ (cf. 1)).

De plus, $T(1) \overset{(3)}{=} 1$, $T(z) \overset{(3)}{=} \alpha + \alpha z$, $T(z^2) \overset{(3)}{=} \alpha^2 + 2\alpha^2 z + \alpha^2 z^2$. On voit que $T(1), T(z), T(z^2) \in \operatorname{Im} T$ et sont linéairement indépendants.

D'où $3 \leq \dim \operatorname{Im} T \leq \dim \mathcal{P}_2 = 3$

$\Rightarrow rg(T) = \dim \operatorname{Im} T = 3$ et $\operatorname{Im} T = \mathcal{P}_2$.

Montrons à présent que $\operatorname{Im} T$ et $\operatorname{Ker} T$ sont en somme directe.

Soit $p \in \operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T$. Alors $p = az^2 + bz + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $T(p) = 0$. Or, $T(p) = 0 \Leftrightarrow T(az^2+bz+c) = 0 \Leftrightarrow M.\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (cf. 2))

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \alpha & 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c + \alpha b + \alpha^2 a = 0 \\ \alpha b + 2\alpha^2 a = 0 \\ \alpha^2 a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0, \text{ car } \alpha \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow p = 0.$$

Donc la somme $\operatorname{Im} T + \operatorname{Ker} T$ est directe. On a aussi, puisque $T$ est linéaire et que $\dim \mathcal{P}_n < +\infty$,

$$\underbrace{\dim \mathcal{P}_n}_{n+1} \overset{\text{thm. de la dimension}}{=} \underbrace{\dim \operatorname{Im} T}_{3} + \dim \operatorname{Ker} T$$
$$= \dim (\operatorname{Im} T \oplus \operatorname{Ker} T)$$

et $\operatorname{Im} T \oplus \operatorname{Ker} T \subseteq \mathcal{P}_n$, d'où $\mathcal{P}_n = \operatorname{Im} T \oplus \operatorname{Ker} T$.

Autre possibilité : calculer $\operatorname{Ker} T$.

$p \in \operatorname{Ker} T \Leftrightarrow T(p) = 0 \Leftrightarrow p(\alpha) + \alpha p'(\alpha) z + \frac{\alpha^2}{2} p''(\alpha) z^2 = 0 \Leftrightarrow p(\alpha) = p'(\alpha) = p''(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha$ est un zéro au moins triple de $p$

$\Leftrightarrow p(z) = (z-\alpha)^3 . q(z)$ avec $q(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-3} z^{n-3}$

$\Leftrightarrow p(z) = a_0 \underline{(z-\alpha)^3} + a_1 \underline{z(z-\alpha)^3} + \dots + a_{n-3} \underline{z^{n-3}.(z-\alpha)^3}$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} T = \rangle \underbrace{(z-\alpha)^3, z(z-\alpha)^3, \dots, z^{n-3}(z-\alpha)^3}_{\text{l.i.} \to \text{base}} \langle$ et $\dim \operatorname{Ker} T = n-2$

6) Représentation matricielle de $T$ dans la base canonique $(1, z, \dots, z^n)$ de $\mathcal{P}_n$.

Il faudrait regarder $T(1), T(\frac{2}{3}), T(\frac{2^2}{3^2}), \dots, T(\frac{2^m}{3^m})$ décomposé dans cette base $\leadsto$ pas pratique.

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha & 2\alpha^2 & * & & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha^2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Idée : Utiliser les points précédents.

N.b. : On peut supposer $n \geq 3$, le cas $n=2$ étant traité aux points 2) et 3).

On a $(1, \frac{2}{3}, \frac{2^2}{3^2})$ base de $\operatorname{Im} T$. Soit $(u_3, \dots, u_n)$ une base de $\operatorname{Ker} T$. Alors $\mathcal{B} = \{1, \frac{2}{3}, \frac{2^2}{3^2}, u_3, \dots, u_n\}$ est une base de $\mathcal{P}_n$. La représentation matricielle de $T$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$C = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 2\alpha^2 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

et le polynôme caractéristique de $T$ est

$$\chi_T(\lambda) = (1-\lambda)(\alpha-\lambda)(\alpha^2-\lambda)(-\lambda)^{n-2}$$

(On sait donc que le polynôme minimum de $T$, $\mathcal{M}_T(\lambda)$
* est multiple de $\underbrace{(\lambda-1)(\lambda-\alpha)(\lambda-\alpha^2)}_{\mathcal{M}_M(\lambda)}\lambda$
* divise $\chi_T(\lambda)$.)

NON ! Ça dépend de la valeur de $\alpha$ !

Rappel : Si $A = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_k)$ où les $A_i$ sont des matrices complexes carrées, alors $\mathcal{M}_A(\lambda) = \operatorname{ppcm}(\mathcal{M}_{A_1}(\lambda), \dots, \mathcal{M}_{A_k}(\lambda))$.

Comme $C$ est une matrice diagonale par blocs, on a

$$\mathcal{M}_T(\lambda) = \operatorname{ppcm}(\mathcal{M}_M(\lambda), \mathcal{M}_0(\lambda)).$$

Or, $\mathcal{M}_0(\lambda) = \lambda$ car $0$ est une matrice diagonale, donc diagonalisable et d'où son polynôme minimum n'a que des zéros simples.

- Cas $\alpha = 1$ : $\chi_T(\lambda) = (1-\lambda)^3(-\lambda)^{n-2}$ & $\mathcal{M}_T(\lambda) = (\lambda-1)^3 \cdot \lambda$.
- Cas $\alpha = -1$ : $\chi_T(\lambda) = (1-\lambda)^2(-1-\lambda)(-\lambda)^{n-2}$ & $\mathcal{M}_T(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)\lambda$
- Cas $\alpha \notin \{-1; 1\}$ : $\chi_T(\lambda) = (1-\lambda)(\alpha-\lambda)(\alpha^2-\lambda)(-\lambda)^{n-2}$ & $\mathcal{M}_T(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-\alpha)(\lambda-\alpha^2) \cdot \lambda$.

**Exercice.** Soit $A \in \mathbb{C}_n^n$ tel que $A^3 + I = 0$ et $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = -1$. Déterminer le polynôme caractéristique de $A$.

On sait que $A$ annule le polynôme $\lambda^3+1 = Q(\lambda)$. Donc le polynôme minimum de $A$, $\mathcal{M}_A$, est t.q. $\mathcal{M}_A \mid \lambda^3+1$. Or, $Q(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-\omega)(\lambda-\bar{\omega})$ avec $\omega = e^{i\pi/3}$. Car $\lambda^3+1=0 \iff \lambda^3 = -1 = e^{i\pi}$. Posons $\lambda = \overset{1}{\overset{\shortparallel}{e}} e^{i\theta}$

$$\iff e^{i3\theta} = e^{i\pi}$$
$$\iff 3\theta = \pi + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\iff \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$$
$$\iff \lambda \in \{\underbrace{e^{i\pi/3}}_{\omega},\ e^{i\pi} = -1;\ e^{5i\pi/3} = \underbrace{e^{-i\pi/3}}_{\bar{\omega}}\}.$$

Donc $sp(A) \subseteq \{-1, \omega, \bar{\omega}\}$.

Notons $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ les multiplicités respectives de $-1, \omega, \bar{\omega}$. Par hypothèse, on a

$$\begin{cases} tr(A) = -1 \\ det(A) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha.(-1) + \beta.\omega + \gamma\bar{\omega} = -1 & (1) \\ (-1)^{\alpha}.\ \omega^{\beta}.\ \bar{\omega}^{\gamma} = -1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \iff -\alpha + \beta\omega + \gamma\bar{\omega} = -1 \iff -\alpha + \beta(\overbrace{\omega+\bar{\omega}}^{e^{i\pi/3}+e^{-i\pi/3} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2.\frac{1}{2} = 1}) + (\gamma-\beta)\underbrace{\bar{\omega}}_{e^{-i\frac{\pi}{3}} = \cos(\frac{-\pi}{3}) + i\sin(\frac{-\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}} = -1$$

$$\iff -\alpha + \beta + (\gamma-\beta)\cos\frac{\pi}{3} - i(\gamma-\beta)\sin\frac{\pi}{3} = -1$$

on sépare parties réelle et imaginaire

$$\iff \begin{cases} -\alpha + \beta + (\gamma-\beta)\cos\frac{\pi}{3} = -1 \\ (\gamma-\beta)\underbrace{\sin\frac{\pi}{3}}_{\neq 0} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = \beta \\ \alpha = \beta+1. \end{cases}$$

$$|\omega|^2 = 1$$

$$(2) \iff (-1)^{1+\beta}\omega^{\beta}.\bar{\omega}^{\beta} = -1 \iff (-1)^{\beta+1}(\overline{\omega\bar{\omega}})^{\beta} = -1 \iff (-1)^{\beta+1} = -1 \iff \beta = 2b \text{ pour un } b\in\mathbb{N}.$$

De plus, on a $\alpha+\beta+\gamma = n$ (= dimension de la matrice), i.e.

$$\beta+1+\beta+\beta = n \iff 3\beta = n-1 \iff 6b = n-1.$$

<u>Cas 1:</u> Si $n-1$ n'est pas multiple de 6 : impossible.

<u>Cas 2:</u> Si $n-1$ est un multiple de 6 (i.e. $n-1 = 6l$ avec $l\in\mathbb{N}$).

Alors $\gamma = \beta = 2b = 2.\frac{n-1}{6} = \frac{n-1}{3}$ & $\alpha = \beta+1 = \frac{n-1}{3} + 1 = \frac{n+2}{3}$.

Dans ce cas, $\chi_A(\lambda) = (-1-\lambda)^{\frac{n+2}{3}}.\ (\omega-\lambda)^{\frac{n-1}{3}}.\ (\bar{\omega}-\lambda)^{\frac{n-1}{3}}$

$((\omega-\lambda)(\bar{\omega}-\lambda))^{\frac{n-1}{3}}$ et $(\omega-\lambda)(\bar{\omega}-\lambda) = \overset{1}{\omega\bar{\omega}} - \overset{1}{(\omega+\bar{\omega})}\lambda + \lambda^2$

$$= (-1-\lambda)^{\frac{n+2}{3}}(1-\lambda+\lambda^2)^{\frac{n-1}{3}}.$$

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{k=1}^{p}(\lambda_k - \lambda)^{\alpha_k}.$$

**Exercice.** Soit

$$T\colon \mathbb{C}_2^2 \to \mathbb{C}_2^2,\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés de $T$.
2. L'opérateur $T$ est-il diagonalisable ?
3. Déterminer le polynôme minimum de $T$.

1) Représentation matricielle

Représentation matricielle de $T$ dans la base $\mathcal{B} = \left\{ \underset{A_1}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}; \underset{A_2}{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}; \underset{A_3}{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}; \underset{A_4}{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}} \right\}$.

- $T(A_1) = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = A_2$
- $T(A_2) = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = A_3$
- $T(A_3) = \begin{pmatrix}2&1\\-2&0\end{pmatrix} = 2A_1 + A_2 - 2A_3$
- $T(A_4) = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = A_4$.

Donc la matrice qui représente $T$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recherche des v.p.

Polynôme caractéristique : $\chi_T(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

$$\underset{L_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{3} L_i}{=} (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{=} (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 \cdot (-2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 (-2-\lambda)(-\lambda-1).$$

Les v.p. de $T$ sont $1$ ($\mu_1 = 2$), $-2$ ($\mu_{-2} = 1$) et $-1$ ($\mu_{-1} = 1$).

Recherche de $E_1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 3z \\ \underbrace{(2-3+1)}_{0} z = 0 \end{cases}$$

D'où $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ 3z \\ z \\ t \end{pmatrix} \middle| z, t \in \mathbb{C} \right\} = \underbrace{\left\langle \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\text{l.i.}} \right\rangle}_{\text{base}}$

**Recherche de $E_{-2}$.**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_{-2} \Leftrightarrow (A+2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2z=0 \\ x+2y+z=0 \\ y=0 \\ 3t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=0 \\ z=-x \end{cases}$$

D'où
$$E_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{C} \right\} = \rangle \underbrace{\overset{l.i.}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}}_{\text{base}} \langle .$$

**Recherche de $E_{-1}$.**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow (A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=0 \\ x+y+z=0 \\ y-z=0 \\ 2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=z \\ x=-2z \\ 0=0 \end{cases}$$

D'où
$$E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, z \in \mathbb{C} \right\} = \rangle \underbrace{\overset{l.i.}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}_{\text{base}} \langle .$$

2) L'opérateur $T$ est diagonalisable, car

$$\dim E_1 = 2 = \mu_1, \quad \dim E_{-2} = 1 = \mu_{-2}, \quad \dim E_{-1} = 1 = \mu_{-1}.$$

La matrice qui diagonalise $A$ est

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on a $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(1, 1, -2, -1)$.

3) On a $\chi_T(\lambda) = (1-\lambda)^2(-2-\lambda)(-1-\lambda)$. Donc

$$\mathcal{M}_T(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+1) \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}_T(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)(\lambda+1).$$

Or,

$$(A-I)\cdot(A+2I)(A+I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc $\mathcal{M}_T(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+1)$.

**Remarque:** Comme $T$ est diagonalisable, on sait directement que les zéros de $\mathcal{M}_T$ sont simples.

**Enoncé** : Déterminer le polynôme minimum des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

**Solution** :

1. Le polynôme caractéristique de $A$ est $(x-1)^2$. Donc le polynôme minimal (qui divise le polynôme caractéristique) ne peut être que $x-1$ ou $(x-1)^2$. Dans le premier cas, la matrice $A$ serait égale à l'identité, ce qui n'est pas le cas. Donc son polynôme minimal est $(x-1)^2$.

2. On remarque de suite que $B^2 = 3B$. Donc $x^2 - 3x$ est un polynome annulateur de $B$. Le polynôme minimal est donc soit $x^2 - 3x$, soit $x - 3$ soit $x$. Mais comme $A$ n'est ni $3I_3$ ni la matrice nulle, on en conclut que le polynôme minimal est $x^2 - 3x$.

3. La matrice $C$ a pour polynôme caractéristique $(1-x)(1+x)^2$. De plus, on peut vérifier facilement (en calculant les sous-espaces propres) que $C$ est diagonalisable. Donc son polynôme minimum est nécessairement $(x-1)(x+1)$.

4. Le polynôme caractéristique de $D$ est $(x+1)^3$. Comme $D \neq -I_3$ on en déduit que son polynômc minimun est soit $(x+1)^2$ soit $(x+1)^3$. Un calcul rapide montre que $(D+I_3)^2 = 0$ et donc $(x+1)^2$ est le polynôme minimal.

sur un champ $\mathbb{K}$

**Exercice.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $T$ un endomorphisme de $E$. Si $x \in E$ est tel que $x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x)$ est une base de $E$ alors le polynôme minimum et le polynôme caractéristique de $T$ coïncident. (à multiplication par $-1$ près).

Comme $\dim E = n$, on a $\deg \chi_T = n$ et $\deg \mathcal{M}_T \leq n$, car $\mathcal{M}_T \mid \chi_T$. Puisque $\chi_T$ et $\mathcal{M}_T$ ont les mêmes zéros, ils coïncident (à multiplication par $-1$ près) ssi ils ont le même degré, vu que $\mathcal{M}_T \mid \chi_T$. Procédons par l'absurde et supposons que $\deg \mathcal{M}_T < n$. Notons $d = \deg \mathcal{M}_T$. Alors $\exists\, a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\mathcal{M}_T(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \ldots + a_{d-1}\lambda^{d-1} + \lambda^d.$$

Or, $\mathcal{M}_T(T) = 0$, donc

$$\underbrace{a_0 \mathrm{Id} + a_1 T + \ldots + a_{d-1} T^{d-1} + T^d}_{\in \mathcal{L}(E)} = 0.$$

opérateur nul

On en tire que

$$a_0 x + a_1 T(x) + \ldots + a_{d-1} T^{d-1}(x) + T^d(x) = 0.$$

Comme $d < n$, $\{x, T(x), \ldots, T^{d-1}(x), T^d(x)\}$ est une partie libre de $E$. Or, on a trouvé une combinaison linéaire nulle de $\{x, T(x), \ldots, T^{d-1}(x), T^d(x)\}$ avec les coefficients non tous nuls, d'où une contradiction.

**Exercice.** Soit $n \geq 1$. Déterminer le polynôme minimum et caractéristique de l'application

$$S : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n,\ p \mapsto p(z+1).$$

Remarque: L'application $S$ va bien de $\mathcal{P}_m$ dans $\mathcal{P}_m$ et est linéaire.

Représentation matricielle de $S$ dans la base $\mathcal{B} = \{1, z, \dots, z^m\}$:

- $S(1) \overset{(z)}{=} 1$ • $S(z) \overset{(z)}{=} z+1$ • $S(z^2) \overset{(z)}{=} (z+1)^2 = z^2 + 2z + 1$
- $S(z^k) \overset{(z)}{=} (z+1)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j z^j$, $\forall k \in \{0, \dots, m\}$.

Donc la matrice qui représente $S$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} S(1) & S(z) & & & & & S(z^m) \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdot & m \\
0 & 0 & 1 & 3 & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0 & 1 & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & m \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} 1 \\ z \\ \\ \\ \\ \\ z^m \end{array}
\end{array}$$

$m+1$

Triangle de Pascal.

$A \in \mathbb{C}^{m+1}_{m+1}$

Le polynôme caractéristique de $S$ est

$$\chi_S(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^{m+1}.$$

On sait que $\mathcal{M}_S \mid \chi_S$, donc $\mathcal{M}_S(z) = (z-1)^d$ pour un $d \in \{1, \dots, m+1\}$.

Trouvons $d$ (le + petit t.q. $(S - id)^d = 0$).

Soit $p \in \mathcal{P}_m$. Alors $\deg p = k \leq m$ et $\exists\, a_0, \dots, a_k \in \mathbb{C}$, $a_k \neq 0$ t.q.

$$p(z) = a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0.$$

On a

$$(S - id)(p)(z) = S(p)(z) - p(z) = a_k (z+1)^k + a_{k-1}(z+1)^{k-1} + \dots + a_1(z+1) + a_0$$
$$- a_k z^k - a_{k-1} z^{k-1} - \dots - a_1 z - a_0.$$

- Coefficient de $z^k$ : $a_k - a_k = 0$
- Coefficient de $z^{k-1}$ : $a_k . C_k^{k-1} + a_{k-1} - a_{k-1} = k . a_k \neq 0$.

On a donc $\deg((S - id)(p)) = \deg p - 1$. On en tire que

$\deg((S - id)^i(p)) = \deg p - i$ et $\deg((S - id)^m(z^m)) = m - m = 0$.

Donc $(S-id)^n(z^{2n})$ est une constante. On a  Est-ce que c'est 0?

$$(S-id)^n(z^n) = (S-id)\Big(\underbrace{(S-id)^{n-1}(z^{n})}_{\text{polynôme de deg. } n-(n-1)=1.}\Big)$$

Or, si $p(z) = az+b \quad (a \neq 0)$,

$$\begin{aligned}(S-id)\,p(z) &= p(z+1) - p(z)\\ &= a(z+1)+b-(az+b)\\ &= a \neq 0,\end{aligned}$$

donc $(S-id)^n(z^n) \neq 0$.

Finalement,

$$\mathcal{M}_S(z) = (z-1)^{n+1}.$$

**Exercice.** Soit $n \geq 1$. Déterminer le polynôme minimum et caractéristique de l'opérateur $D \colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n,\ p \mapsto Dp(z)$.

Remarque: L'opérateur $D$ va bien de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathcal{P}_n$ et est linéaire.
Cherchons un polynôme $p \in \mathcal{P}_n$ t.q. $p(D) = 0$.
Le polynôme $p(z) = z^{n+1}$ convient car $\forall q \in \mathcal{P}_n$, on a

$$p(D)(q) = D^{n+1}(q) = 0.$$

De plus, le polynôme $p_2(z) = z^n$ n'est pas nul en $D$. En effet,

$$p_2(D)(z^n) = D^n(z^n) = n! \neq 0.$$

On en tire que $\mathcal{M}_D(z) = z^{n+1}$.
Enfin, $\chi_D$ est un polynôme de degré $n+1$ multiple de $\mathcal{M}_D$, d'où

$$\chi_D(z) = \pm z^{n+1}.$$

↳ dépend de la parité de $n$.

$$\chi_D(z) = \begin{cases} z^{n+1} & \text{si } n \text{ impair} \\ -z^{n+1} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

**Enoncé** : Déterminer les matrices $A \in \mathbb{R}_n^n$ telles que $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$ soit diagonalisable.

**Solution** : Supposons que $B$ soit diagonalisable. La matrice $B$ est donc annulée par un polynôme $P$ dont toutes les racines sont simples (le polynôme minimum). On vérifie facilement par récurrence sur $n$ que

$$B^n = \left(\begin{array}{c|c} A^n & nA^n \\ \hline 0 & A^n \end{array}\right).$$

Alors, en additionnant les puissances successives on trouve

$$P(B) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & AP'(A) \\ \hline 0 & P(A) \end{array}\right).$$

Comme $P(B) = 0$ on en déduit que $P(A) = 0 = AP'(A)$. Or $P$ et $P'$ sont premiers entre eux puisque $P$ n'a que des racines simples. Donc, par le théorème de Bezout, il existe des polynomes $U$ et $V$ tels que $U(x)P(x) + V(x)P'(x) = 1$ ou encore

$$xU(x)P(x) + V(x)xP'(x) = x.$$

En évaluant cette égalité en $A$ et en utilisant le fait que $P(A) = 0 = AP'(A)$ on trouve $A = 0$. Réciproquement, si $A$ est la matrice nulle, on voit immédiatemment que $B$ est diagonalisable.

**Enoncé** : Soient $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie et $T \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $T$ possède un polynôme annulateur $P$ vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer qu'on a alors $\mathrm{im}(T) \oplus \ker(T) = E$.

**Solution** : Soit $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ce polynôme. Puisque $P(0) = 0$, on a $a_0 = 0$. Puisque $P'(0) \neq 0$, on a $a_1 \neq 0$. Soit à présent $y \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$. On peut donc écrire $y = f(x)$ et on sait que $f(y) = 0$, ce qui entraîne $f^p(x) = 0$ pour tout $p \geq 2$. On applique alors la relation $P(f) = 0$ à $x$ pour trouver

$$0 = P(f)(x) = a_n f^n(x) + \cdots + a_1 f(x) = a_1 f(x) = a_1 y,$$

ce qui entraîne $y = 0$ car $a_1 \neq 0$. Donc $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont en somme directe. De plus, par le théorème du rang, on sait que

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(E),$$

d'où l'égalité demandée.