UNIVERSITÉ de Liège
Faculté des Sciences

FRAMES D'EXPONENTIELLES

Année académique 2003-2004

Mémoire présenté par
Émilie Charlier
en vue de l'obtention
du grade de licenciée en
sciences mathématiques

Introduction

Actuellement, la théorie des frames est utilisée principalement en analyse du signal. La découverte du lien entre les frames et les ondelelettes et les bases de Riesz a marqué le point de départ de l'essor de la théorie des frames dans ce domaine.

C'est dans le contexte de l'étude des séries nonharmoniques de Fourier que les frames ont été introduites par R.J. Duffin et A.C. Schaeffer en 1952 dans leur article intitulé "A class of nonharmonic Fourier series" ([7]). Bien que la définition générale d'une frame sur un espace de Hilbert soit déjà donnée dans cet article et qu'une théorie des frames en elle-même y soit déjà développée, les auteurs, concernés surtout par l'analyse nonharmonique de Fourier, y développent essentiellement la notion de frames d'exponentielles dans l'espace $L^2(I)$, où I est un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de nombres complexes, on dit que la suite $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une frame d'exponentielles sur $L^2(I)$ s'il existe des constantes strictement positives A et B telles que

$$A\int_I |f(x)|^2dx \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\int_I f(x)e^{-i\lambda_n x}dx\right|^2 \leq B\int_I |f(x)|^2dx,\ \forall f\in L^2(I).$$

On dit alors que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ génère la frame d'exponentielles $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$.

Le résultat principal obtenu par R.J. Duffin et A.C. Schaeffer dans [7] est une condition suffisante pour qu'une suite de nombres complexes génère une frame d'exponentielles. Ce résultat est basé sur un résultat reliant les suites de densité uniforme et les fonctions entières de type exponentiel. Dans [7], les auteurs ne présentent qu'une condition suffisante, ils laissent donc là un problème ouvert : la caractérisation des frames d'exponentielles.

Une résolution partielle de ce problème n'a été donnée que bien plus tard par S. Jaffard. En effet, en 1991, dans son article "A density criterion for frames of complex exponentials" ([10]), S. Jaffard propose une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite réelle génère une frame d'exponentielles.

Le but de ce mémoire est de présenter ces résultats.

Tout d'abord, nous commençons par une brève présentation des suites de Bessel et des frames sur un espace de Hilbert en toute généralité.

Ensuite, le second chapitre est consacré à la démonstration du résultat obtenu par R.J. Duffin et A.C. Schaeffer donnant une condition suffisante pour qu'une suite de nombres complexes génère une frame d'exponentielles. Un point clé est le lien entre les frames d'exponentielles et l'espace de Paley-Wiener des fonctions entières de type exponentiel dont la restriction à l'axe réel appartient à $L^2(\mathbb{R})$. Nous détaillons donc également la preuve d'une version du théorème de Paley-Wiener. A la fin de ce chapitre sont donnés quelques exemples destinés à montrer que le résultat de Duffin-Schaeffer ne peut être amélioré en terme de longueur de l'intervalle I de définition de la frame d'exponentielles.

Dans le troisième chapitre, nous donnons une démonstration de la caractérisation des frames d'exponentielles obtenue par S. Jaffard. Nous terminons par une preuve d'un résultat partiel de Duffin et Schaeffer concernant le cas complexe.

Mes premiers remerciements vont à Madame F. Bastin pour l'aide reçue tout au long de cette année académique en insistant sur son enthousiasme et sa grande disponibilité.

J'adresse également de sincères remerciements à Madame C. Boigelot pour les suggestions qu'elle a apportées à mon travail.

J'aimerais enfin remercier Monsieur S. Jaffard et Monsieur O. Christensen pour leurs conseils avisés.

Chapitre 1

Introduction aux frames

1.1 Premières définitions

1.1.1 Définition d'une frame sur un espace de Hilbert

Convention 1.1.1. Dans l'entièreté de ce texte, $\mathbb{J}$ désigne un sous-ensemble (fini ou non) de $\mathbb{Z}$.

Définition 1.1.2. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Une suite d'éléments $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{J}}$ de $\mathcal{H}$ est appelée *une frame sur* $\mathcal{H}$ s'il existe des constantes A et B strictement positives telles que

$$A\|e\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{j\in\mathbb{J}} |\langle e, \varphi_j\rangle_{\mathcal{H}}|^2 \leq B\|e\|_{\mathcal{H}}^2, \ \forall e \in \mathcal{H}.$$

Les constantes A et B sont appelées *bornes de la frame* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{J}}$.

Remarque 1.1.3. Une frame n'est pas nécessairement une base de Hamel. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer qu'en ajoutant l'élément 0 à la frame $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{J}}$, on garde une frame.

1.1.2 Définition d'une suite de Bessel sur un espace de Hilbert

La condition pour qu'une suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{J}}$ de $\mathcal{H}$ soit une frame peut-être séparée en une condition supérieure, à savoir

$$\sum_{j\in\mathbb{J}} |\langle e, \varphi_j\rangle_{\mathcal{H}}|^2 \leq B\|e\|_{\mathcal{H}}^2, \ \forall e \in \mathcal{H}.$$

et une condition inférieure, à savoir

$$A\|e\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{j\in\mathbb{J}} |\langle e, \varphi_j\rangle_{\mathcal{H}}|^2, \ \forall e \in \mathcal{H}.$$

Il est souvent intéressant de regarder ces deux conditions séparément. C'est pourquoi nous introduisons la définition suivante.

Définition 1.1.4. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Une suite d'éléments $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{J}}$ de $\mathcal{H}$ est appelée *une suite de Bessel sur* $\mathcal{H}$ s'il existe une constante B strictement positive telle que

$$\sum_{j\in\mathbb{J}} |\langle e, \varphi_j\rangle_{\mathcal{H}}|^2 \leq B\|e\|^2_{\mathcal{H}},\ \forall e \in \mathcal{H}.$$

La constante B est appelée *borne de la suite de Bessel* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{J}}$.

1.2 Opérateurs associés à une frame

1.2.1 Définition de l'opérateur pré-frame

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

Définition 1.2.1. Considérons une suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{J}}$ de $\mathcal{H}$. Nous définissons *l'opérateur pré-frame associé* $\mathcal{F}$ par

$$\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \omega\ e \mapsto \mathcal{F}e := (\langle e, \varphi_j\rangle_{\mathcal{H}})_{j\in\mathbb{J}},$$

où ω désiqne l'ensemble des suites de $\mathbb{J}$.

Il s'agit de déterminer les suites de $\mathcal{H}$ pour lesquelles l'opérateur pré-frame est défini de $\mathcal{H}$ dans $l^2(\mathbb{J})$, où $l^2(\mathbb{J})$ est le sous-ensemble de ω défini par

$$l^2(\mathbb{J}) := \left\{ (c_j)_{j\in\mathbb{J}} : \left\|(c_j)_{j\in\mathbb{J}}\right\|^2_{l^2(\mathbb{J})} = \sum_{j\in\mathbb{J}} |c_j|^2 < \infty \right\}$$

et muni du produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : l^2(\mathbb{J}) \times l^2(\mathbb{J}) \to \mathbb{C}\ \left((c_j)_{j\in\mathbb{J}}, (d_j)_{j\in\mathbb{J}}\right) \mapsto \sum_{j\in\mathbb{J}} c_j\overline{d_j}.$$

1.2.2 Suites de Bessel et opérateur pré-frame

Les suites de Bessel peuvent être caractérisées grâce à l'opérateur pré-frame associé.

Proposition 1.2.2. *La suite* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{J}}$ *de* $\mathcal{H}$ *est une suite de Bessel sur* $\mathcal{H}$ *si et seulement si l'opérateur pré-frame associé*

$$\mathcal{F} : \mathcal{H} \to l^2(\mathbb{J})\ e \mapsto (\langle e, \varphi_j\rangle_{\mathcal{H}})_{j\in\mathbb{J}}$$

est défini et continu de $\mathcal{H}$ *dans* $l^2(\mathbb{J})$, *Dans ce cas, on a même* $\|\mathcal{F}\| \leq \sqrt{B}$, *pour toute borne* B *de la suite de Bessel* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{J}}$.

Démonstration. La première partie de la proposition résulte directement de la définition d'une suite de Bessel. En effet, l'opérateur pré-frame $\mathcal{F}$ est continu de $\mathcal{H}$ dans $l^2(\mathbb{J})$ si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\mathcal{F}e\|_{l^2(\mathbb{J})} \leq C\|e\|_{\mathcal{H}},\ \forall e \in \mathcal{H},$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\sqrt{\sum_{j\in\mathbb{J}} |\langle e, \varphi_j\rangle_{\mathcal{H}}|^2} \leq C\|e\|_{\mathcal{H}},\ \forall e \in \mathcal{H}.$$

En élévant les deux membres au carré, on a la conclusion.
La seconde partie de la proposition est immédiate, vu ce qui précède. □

Corollaire 1.2.3. *Soit $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{J}}$ une suite de Bessel sur $\mathcal{H}$. L'opérateur préframe associé $\mathcal{F}$ a un adjoint $\mathcal{F}^* : l^2(\mathbb{J}) \to \mathcal{H}$ tel que $\|\mathcal{F}^*\| = \|\mathcal{F}\| \leq \sqrt{B}$ et donné par*

$$\mathcal{F}^*\left((c_j)_{j\in\mathbb{J}}\right) = \sum_{j\in\mathbb{J}} c_j\varphi_j$$

avec la convergence dans $\mathcal{H}$, pour toute suite $(c_j)_{j\in\mathbb{J}} \in l^2(\mathbb{J})$.

Démonstration. La première partie est immédiate vu la proposition 1.2.2. Montrons la seconde partie. L'opérateur $\mathcal{F}^*$ doit satisfaire l'égalité suivante :

$$\left\langle e, \mathcal{F}^*\left((c_j)_{j\in\mathbb{J}}\right)\right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \mathcal{F}e, (c_j)_{j\in\mathbb{J}}\right\rangle_{l^2(\mathbb{J})}, \forall e \in \mathcal{H}, \forall (c_j)_{j\in\mathbb{J}} \in l^2(\mathbb{J}),$$

par définition de l'opérateur adjoint. Nous obtenons alors

$$\left\langle e, \mathcal{F}^*\left((c_j)_{j\in\mathbb{J}}\right)\right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle (\langle e, \varphi_j\rangle_{\mathcal{H}})_{j\in\mathbb{J}}, (c_j)_{j\in\mathbb{J}}\right\rangle_{l^2(\mathbb{J})} = \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle e, \varphi_j\rangle_{\mathcal{H}}\bar{c}_j = \left\langle e, \sum_{j\in\mathbb{J}} c_j\varphi_j\right\rangle_{\mathcal{H}},$$

pour tout $e \in \mathcal{H}$ et pour toute suite $(c_j)_{j\in\mathbb{J}} \in l^2(\mathbb{J})$. La conclusion s'ensuit directement. □

On a même le résultat suivant.

Proposition 1.2.4. *Les propositions suivantes sont équivalentes.*
(i) La suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{J}}$ de $\mathcal{H}$ est une suite de Bessel sur $\mathcal{H}$.
(ii) L'opérateur pré-frame $\mathcal{F}$ est défini de $\mathcal{H}$ dans $l^2(\mathbb{J})$.
(iii)L'opérateur pré-frame adjoint $\mathcal{F}^*$ est défini de $l^2(\mathbb{J})$ dans $\mathcal{H}$.

Démonstration. L'équivalence (ii) ⇔ (iii) est connue vu les propriétés des espaces de Hilbert (voir par exemple [15]). L'implication (i) ⇒ (ii) est directe vu la proposition 1.2.2. Il reste donc à établir l'implication (ii) ⇒ (i). Vu la proposition 1.2.2, il suffit de montrer que l'opérateur $\mathcal{F}$ est continu de $\mathcal{H}$ dans $l^2(\mathbb{J})$. En fait, nous allons montrer que l'opérateur $\mathcal{F}^*$

est continu de $l^2(\mathbb{J})$ dans $\mathcal{H}$, ce qui est équivalent vu les propriétés des espaces de Hilbert. Si l'ensemble des indices $\mathbb{J}$ est fini, c'est immédiat. Sinon, il n'y a pas de restriction à supposer que $\mathbb{J} = \mathbb{Z}$. Le théorème de Banach-Steinhauss (voir par exemple [13]) appliqué à la suite $(\mathcal{F}_m^*)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $L(l^2(\mathbb{Z}), \mathcal{H})$ définie par

$$\mathcal{F}_m^* : l^2(\mathbb{Z}) \to \mathcal{H} : \ (c_j)_{j\in\mathbb{Z}} \mapsto \sum_{j=-m}^{m} c_j \varphi_j$$

affirme alors que si l'opérateur $\mathcal{F}^*$ est bien défini de $l^2(\mathbb{Z})$ dans $\mathcal{H}$, alors celui-ci est continu de $l^2(\mathbb{Z})$ dans $\mathcal{H}$. Ceci achève la démonstration. $\square$

1.2.3 Définition de l'opérateur frame

Définition 1.2.5. Soit $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{J}}$ une frame sur $\mathcal{H}$. Nous définissons *l'opérateur frame associé*

$$S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

par

$$S := \mathcal{F}^*\mathcal{F}.$$

Explicitement, nous avons

$$Se = \mathcal{F}^*\mathcal{F}e = \mathcal{F}^*((\langle e, \varphi_j\rangle_{\mathcal{H}})_{j\in\mathbb{J}}) = \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle e, \varphi_j\rangle_{\mathcal{H}}\varphi_j, \ \forall e \in \mathcal{H}.$$

1.2.4 Propriétés de l'opérateur frame

Proposition 1.2.6. *Soit $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{J}}$ une frame sur $\mathcal{H}$. L'opérateur frame associé*

$$S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad e \longmapsto \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle e, \varphi_j\rangle_{\mathcal{H}}\varphi_j$$

est un isomorphisme vérifiant

(i) $A\|e\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle Se, e\rangle_{\mathcal{H}} \leq B\|e\|_{\mathcal{H}}^2 \ \forall e \in \mathcal{H}$,

(ii) $A \leq\| S \|\leq B$,

(iii) $A\|e\|_{\mathcal{H}} \leq \|Se\|_{\mathcal{H}} \leq B\|e\|_{\mathcal{H}} \ \forall e \in \mathcal{H}$.

Démonstration. Bien sûr, S est un opérateur linéaire. L'opérateur S est continu, comme composition de deux opérateurs continus. Remarquons ensuite que

$$\sum_{j\in\mathbb{J}} |\langle e, \varphi_j\rangle_{\mathcal{H}}|^2 = \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle e, \varphi_j\rangle_{\mathcal{H}}\langle \varphi_j, e\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle e, \varphi_j\rangle_{\mathcal{H}}\varphi_j, e \right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle Se, e\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Le point (i) s'ensuit directement, vu la définition d'une frame dans $\mathcal{H}$.
On obtient ensuite que, $\forall e \in \mathcal{H}, e \neq 0$,

$$A\|e\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle Se, e\rangle_{\mathcal{H}} = \|e\|_{\mathcal{H}} \left\langle Se, \frac{e}{\|e\|_{\mathcal{H}}} \right\rangle_{\mathcal{H}} \leq \|e\|_{\mathcal{H}} \sup_{f\in\mathcal{H}, \|f\|_{\mathcal{H}}=1} |\langle Se, f\rangle_{\mathcal{H}}| = \|e\|_{\mathcal{H}} \|Se\|_{\mathcal{H}},$$

et donc que

$$\|e\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{A}\|Se\|_{\mathcal{H}}, \ \forall e \in \mathcal{H}.$$

On en tire que S est injectif et relativement ouvert. On déduit alors que $\mathrm{im}(S)$ est un fermé de $\mathcal{H}$ puisqu'il est isomorphe à l'espace $\mathcal{H}$ de départ. De plus, l'image de S est dense dans $\mathcal{H}$ car si g est un élément de $\mathcal{H}$ tel qu'on a $\langle Se, g\rangle_{\mathcal{H}} = 0 \ \forall e \in \mathcal{H}$, alors en particulier, on a $\langle Sg, g\rangle_{\mathcal{H}} = 0$, donc $g = 0$ car $A\|g\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle Sg, g\rangle_{\mathcal{H}}$ vu (i). La surjectivité de S s'ensuit puisque $\mathrm{im}(S)$ est fermé. On a donc montré que S est un isomorphisme vérifiant (i).
A présent, montrons les points (ii) et (iii).
Premièrement, on a

$$A\|e\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle Se, e\rangle_{\mathcal{H}} \leq \|Se\|_{\mathcal{H}}\|e\|_{\mathcal{H}} \leq \| S \| \ \|e\|_{\mathcal{H}}^2, \ \forall e \in \mathcal{H},$$

et donc

$$A \leq \| S \| .$$

De plus,

$$\| S \| = \| \mathcal{F}^*\mathcal{F} \| \leq \| \mathcal{F}^* \| \| \mathcal{F} \| = \| \mathcal{F} \|^2 \leq B,$$

vu la proposition 1.2.2. D'où on a bien (ii).
Deuxièmement, on sait, vu ce qui précède, que

$$A\|e\|_{\mathcal{H}} \leq \|Se\|_{\mathcal{H}}, \ \forall e \in \mathcal{H}.$$

D'autre part, on a

$$\|Se\|_{\mathcal{H}} \leq \| S \| \ \|e\|_{\mathcal{H}} \leq B\|e\|_{\mathcal{H}}, \ \forall e \in \mathcal{H}.$$

D'où on a bien (iii). □

Chapitre 2

Suites de densité uniforme, fonctions entières de type exponentiel et frames d'exponentielles

Les frames sont apparues dans le contexte de l'étude des séries de Fourier non harmoniques. R.J. Duffin et A.C. Schaeffer furent les premiers à donner la définition actuelle des frames dans leur arcticle "A Class of Nonharmonic Fourier Series" en 1952 ([7]). Dans ce chapitre, nous allons démontrer un des résultats principaux de cet article dont voici l'énoncé : *Si on dispose d'une suite* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *séparée de densité uniforme d,* $d > 0$, *alors la suite de fonctions* $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une frame sur* $L^2(]-\gamma,\gamma[)$, *où* $0 < \gamma < \pi d$.

2.1 Caractérisation d'une classe de fonctions entières

Cette première partie est consacrée à la démonstration d'une version du théorème de Paley-Wiener, celle-ci intervenant de manière cruciale dans la démonstration du deuxième théorème de Duffin et Schaeffer, une des clés de ce chapitre.

Nous utiliserons les définitions suivantes pour les transformations de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et pour le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Définition 2.1.1. La transformation de Fourier positive $\mathcal{F}^+$ et la transformation de Fourier négative $\mathcal{F}^-$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ sont les applications

$$\mathcal{F}^+ : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\cdot\rangle} f(x)dx$$
$$\mathcal{F}^- : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\cdot\rangle} f(x)dx.$$

Définition 2.1.2. Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire dans $L^2(E)$ est l'application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : L^2(E) \times L^2(E) \to \mathbb{C} \quad (f,g) \mapsto \int_E f(x)\bar{g}(x)dx.$$

On note la norme dans $L^2(E)$ associée à ce produit scalaire

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_E |f(x)|^2 dx}, \ f \in L^2(E).$$

2.1.1 Définition d'une fonction entière de type exponentiel

Définition 2.1.3. Soit $\gamma > 0$. Une fonction entière f est dite *de type exponentiel* γ s'il existe une constante strictement positive A telle que $|f(z)| \leq Ae^{\gamma|z|}$, $z \in \mathbb{C}$.

2.1.2 Théorème de Paley-Wiener

Théorème 2.1.4 (Paley-Wiener). *Soit $\gamma > 0$ et soit f une fonction définie dans le plan complexe. Alors f est entière de type exponentiel γ et sa restriction à $\mathbb{R}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe une fonction g appartenant à $L^2(]-\gamma, \gamma[)$ telle que*

$$f(z) = \int_{-\gamma}^{\gamma} g(t)e^{izt}dt, \ z \in \mathbb{C}.$$

Pour faciliter la preuve de ce théorème, nous avons besoin d'un résultat auxiliaire qui possède un intérêt propre pour la suite de ce texte.

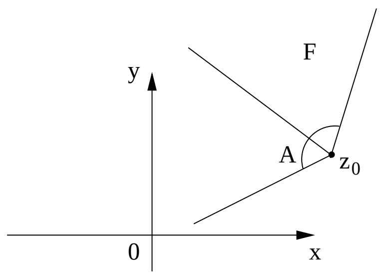
Lemme 2.1.5 (Principe de Phragmén-Lindelöf). *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert contenant un angle fermé F de sommet z_0 et d'ouverture $A \leq \pi$. Si cette fonction f vérifie*

$$|f| \leq M \ \text{dans} \ \dot{F} \tag{2.1}$$

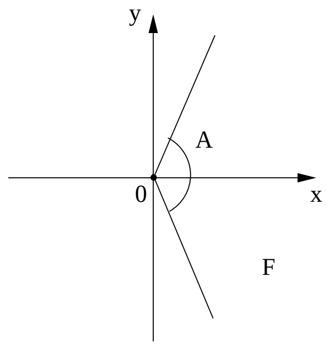
$$|f(z)| \leq Ce^{c|z|^\alpha} \ \text{dans} \ F \tag{2.2}$$

avec $M > 0$, $C > 0$, $c > 0$ et $0 < \alpha < \frac{\pi}{A}$, alors elle vérifie

$$|f| \leq M \ \text{dans} \ F.$$



Démonstration. Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que $z_0 = 0$ et quitte à effectuer une rotation, on peut supposer que la bissectrice de l'angle F considéré coïncide avec la demi-droite réelle positive.



Considérons la fonction

$$g(z) := e^{-\varepsilon c z^\delta} f(z)$$

avec $\varepsilon > 0$ et $\alpha < \delta < \frac{\pi}{A}$. On a choisi ici la définition classique pour l'argument de z dans l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty, 0] \times \{0\})$.
Il est clair que nous avons

$$|g(z)| = \left| \ e^{-\varepsilon c|z|^\delta e^{i\delta\theta}} \right| \ |f(z)| = e^{-\varepsilon c|z|^\delta \cos(\delta\theta)} |f(z)|,$$

où $\theta = \arg(z)$.
D'une part, sur les côtés de l'angle, on a $\theta \in \{\frac{A}{2}, -\frac{A}{2}\}$. Par conséquent, vu l'hypothèse (2.1), on a

$$|g(z)| = e^{-\varepsilon c|z|^\delta \cos\left(\delta \frac{A}{2}\right)} |f(z)| \leq |f(z)| \leq M, \ \ z \in \dot{F},$$

car $0 < \delta \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$.
D'autre part, sur l'arc $|z| = R > 0$ de l'angle F, vu l'hypothèse (2.2), on a

$$|g(z)| = e^{-\varepsilon c R^\delta \cos(\delta\theta)} |f(z)| \leq C e^{c\left(R^\alpha - \varepsilon R^\delta \cos(\delta\theta)\right)}$$

et le second membre tend vers 0 si R tend vers $+\infty$ car

$$\delta > \alpha \text{ et } -\frac{\pi}{2} < -\delta\frac{A}{2} \leq \delta\theta \leq \delta\frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent, il existe $R_0 > 0$ tel que pour tout z de l'angle fermé F tel que $|z| \geq R_0$, on ait

$$|g(z)| \leq M.$$

Cela étant, par le principe du maximum, il vient

$$|g| \leq M \text{ dans l'angle } F.$$

Il s'ensuit que

$$|f(z)| \leq M e^{\varepsilon c |z|^\delta} \text{ dans l'angle } F,$$

d'où la conclusion en faisant tendre ε vers 0^+. $\square$

Voici à présent un petit résultat dont nous aurons besoin dans la démonstration du théorème de Paley-Wiener. Une démonstration de celui-ci se trouve par exemple dans [1].

Lemme 2.1.6. *Pour tout* $r > 0$, *on a*

$$\int_0^\pi e^{-r\sin\theta} d\theta \leq \frac{\pi}{r}.$$

Démontrons à présent le théorème de Paley-Wiener 2.1.4.

Démonstration du théorème de Paley-Wiener. La condition est suffisante. Soit g une fonction appartenant à $L^2(]-\gamma,\gamma[)$.
- Vérifions que la fonction f définie dans $\mathbb{C}$ par

$$f(z) := \int_{-\gamma}^{\gamma} g(t) e^{izt} dt$$

est entière.
Tout d'abord, cette définition a un sens car $e^{-yt}g(t)$ est intégrable sur $]-\gamma,\gamma[$.
Ensuite, la fonction $f(x,y) := f(z) = f(x+iy)$ apppartient à $C_1(\mathbb{R}^2)$ par application du théorème de dérivation des intégrales paramétriques à la fonction $g_z(t) := g(t)e^{izt}$. Cela étant, il vient

$$D_x f(z) = \int_{-\gamma}^{\gamma} it\ g(t) e^{izt} dt \quad \text{et} \quad D_y f(z) = \int_{-\gamma}^{\gamma} (-t)\ g(t) e^{izt} dt,$$

d'où $D_x f(z) + iD_y f(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, vu le théorème de Cauchy-Riemann.
- Vu que

$$|f(z)| \leq e^{\gamma|\Im z|} \int_{-\gamma}^{\gamma} |g(t)| dt \leq e^{\gamma|z|} \int_{-\gamma}^{\gamma} |g(t)| dt,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

la fonction f est de type exponentiel γ.
- Il reste à montrer que la restriction de la fonction f à la droite réelle appartient à $L^2(\mathbb{R})$, ce qui est évident puisque

$$f\mid_{\mathbb{R}} \ :\ x \mapsto f(x) = \int_{-\gamma}^{\gamma} g(t) e^{ixt} dt$$

est la transformée de Fourier positive de la fonction

$$g\chi_{]-\gamma,\gamma[},$$

laquelle appartient à $L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R})$.

La condition est nécessaire. Soit f une fonction entière de type exponentiel γ, dont la restriction à la droite réelle appartient à $L^2(\mathbb{R})$. La fonction g définie dans $\mathbb{R}$ par

$$g(x) := \frac{1}{2\pi} \mathbb{F}_x^- f$$

appartient aussi à $L^2(\mathbb{R})$ et on a bien sûr

$$f(x) =_{\text{pp}} \mathbb{F}_x^+ g,\ x \in \mathbb{R},$$

vu le théorème de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$. Nous allons montrer que $g(x) = 0$ pour presque tout x tel que $|x| > \gamma$, ce qui sera suffisant pour conclure. En effet, f est une fonction entière et vu la première partie, il en est de même pour la fonction

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} g(t)e^{izt}dt.$$

Comme toute fonction holomorphe est continue et comme deux fonctions entières égales sur un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ sont égales partout, on aura la conclusion.
On définit la fonction h dans $\mathbb{C}$ par

$$h(z) := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(\xi - z)d\xi,$$

ce qui a un sens car toute fonction holomorphe est continue. La fonction h est entière de type exponentiel γ. En effet, f est une fonction entière, et comme f est de type exponentiel γ, il existe une constante $B > 0$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|h(z)| \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(\xi - z)|d\xi \leq B \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\gamma(|z|+|\xi|)}d\xi = B \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\gamma|\xi|}d\xi\ e^{\gamma|z|} = B'e^{\gamma|z|}, \tag{2.3}$$

où $B' := B \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\gamma|\xi|}d\xi$. La fonction h appartient à $L^2(\mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R})$, si on la restreint à l'axe réel. De fait, on a

$$h = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} * \tilde{f}$$

où $\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \in L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R})$ et $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$.
Montrons que $g(x) = 0$ pour presque tout x tel que $x > \gamma$, le cas $x < \gamma$ s'obtenant de manière analogue.
Soit $A > \gamma$. Définissons la fonction H dans $\mathbb{C}$ par

$$H(z) := e^{iAz}h(z).$$

La fonction H est entière comme produit de deux fonctions entières et est de type exponentiel $A + \gamma$ puisque

$$|H(z)| \leq e^{A|z|}|h(z)|$$

et que la fonction h est de type exponentiel γ.
De plus,

- si $z = x \in \mathbb{R}$, alors $|H(z)| = |H(x)| = |h(x)|$. Comme $h \in L^\infty(\mathbb{R})$, H est borné sur l'axe réel ;

- si $z = iy$ avec $y \geq 0$, alors

$$|H(z)| = |H(iy)| = e^{-Ay}|h(iy)| \leq e^{-Ay}B'e^{\gamma y} = B'e^{(\gamma-A)y} \leq B',$$

vu l'inégalité (2.3) et vu que $\gamma - A < 0$. Ceci montre que H est borné sur le demi-axe imaginaire positif.

Cela étant, la fonction H vérifie les hypothèses du principe de Phragmén-Lindelöf 2.1.5 dans les angles

$$F_1 = \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$$

et

$$F_2 = \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [\frac{\pi}{2}, \pi]\},$$

avec les constantes $C = B'$, $c = A + \gamma > 0$ et $0 < \alpha = 1 < \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2$. On obtient ainsi l'existence de constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que

$$|H(z)| \leq C_1 \text{ dans } F_1 \text{ et } |H(z)| \leq C_2 \text{ dans } F_2,$$

c'est-à-dire, vu la définition de H,

$$|h(z)| \leq C_1 e^{A\Im y} \text{ dans } F_1 \text{ et } |h(z)| \leq C_2 e^{A\Im y} \text{ dans } F_2,$$

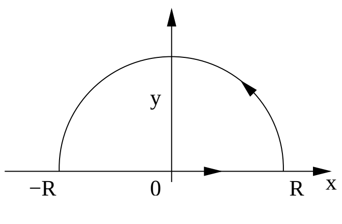
En posant $C := \sup\{C_1, C_2\}$, il vient

$$|h(z)| \leq Ce^{A\Im z} \text{ dans } \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\}. \tag{2.4}$$

Fixons $L > 0$ et prenons $R > \frac{1}{L}$. Considérons l'intégrale

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{ixz}}{1 - Liz} h(z)dz, \; x > A,$$

sur le contour $\mathcal{C}$ suivant :



Comme la fonction

$$\frac{e^{ixz}}{1 - Liz} h(z)$$

est holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{\frac{-i}{L}\}$ et comme le chemin $\mathcal{C}$ est homotope à un chemin constant dans cet ouvert, on a

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{ixz}}{1 - Liz} h(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix\xi}}{1 - Li\xi} h(\xi)d\xi + \int_0^{\pi} \frac{e^{ixRe^{i\theta}}}{1 - LiRe^{i\theta}} h(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta = 0.$$

Dès lors, vu (2.4), il vient

$$\begin{aligned}\left|\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix\xi}}{1-Li\xi}h(\xi)d\xi\right| &= \left|\int_{0}^{\pi}\frac{e^{ixRe^{i\theta}}}{1-LiRe^{i\theta}}h(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta\right|\\ &\leq \frac{CR}{LR-1}\int_0^\pi e^{-xR\sin\theta+AR\sin\theta}d\theta\\ &= \frac{CR}{LR-1}\int_0^\pi e^{(A-x)R\sin\theta}d\theta\end{aligned}$$

car $|1-LiRe^{i\theta}|\geq|1-LR|=LR-1$. On obtient ainsi, pour $x>A$,

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix\xi}}{1-Li\xi}h(\xi)d\xi\to 0 \text{ lorsque } R\to+\infty$$

en utilisant le lemme 2.1.6.

Définissons les fonctions $h_{-L}(x),\ L>0,\ x\in\mathbb{R}$ par

$$h_{-L}(x):=\frac{h(x)}{1-Lix}.$$

Vu que h et $\frac{1}{1-Lix}$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R})\bigcap L^\infty(\mathbb{R})$, il est clair que ces fonctions appartiennent à $L^1(\mathbb{R})\bigcap L^2(\mathbb{R})$. Par ce qui prècède, on a

$$\mathbb{F}_x^+h_{-L}=0,\ \forall x>A,\ \forall L>0. \tag{2.5}$$

De plus, par application du théorème de la convergence majorée, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{h(\xi)}{1-Li\xi}-h(\xi)\right|^2d\xi\to 0^+ \text{ si } L\to 0^+$$

puisque

$$\left|\frac{h(\xi)}{1-Li\xi}-h(\xi)\right|^2=\left|\frac{Li\xi}{1-Li\xi}\right|^2|h(\xi)|^2=\frac{L^2\xi^2}{1+L^2\xi^2}|h(\xi)|^2\leq|h(\xi)|^2$$

où $|h(\xi)|^2$ est une fonction intégrable fixe. D'où $\|h_{-L}-h\|_2\to 0^+$ lorsque L $\to 0^+$, et on a bien sûr $\|\mathbb{F}^+h_{-L}-\mathbb{F}^+h\|_2\to 0^+$ lorsque $L\to 0^+$. Dès lors, vu (2.5), il vient

$$\mathbb{F}_x^+h=_{pp}0 \text{ pour } x>A.$$

Cela étant, on a

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(\xi - x)d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(\xi - x)\ \chi_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[}(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(\xi - x)\ \mathbb{F}^{-}_{\xi}\left(\frac{\sin\left(\frac{\cdot}{2}\right)}{\frac{\cdot}{2}}\right) d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)\ \mathbb{F}^{-}_{x+t}\left(\frac{\sin\left(\frac{\cdot}{2}\right)}{\frac{\cdot}{2}}\right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t)\ \mathbb{F}^{-}_{t}\varphi\ dt = \left\langle f, \overline{\mathbb{F}^{-}\varphi}\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \left\langle f, \mathbb{F}^{+}\bar{\varphi}\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \left\langle \mathbb{F}^{-}f, \bar{\varphi}\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{F}^{-}_{t}f\ \varphi(t)\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{F}^{-}_{t}f\ e^{-ixt}\frac{\sin(\frac{t}{2})}{\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{2\pi}\mathbb{F}^{-}_{x}\left(\mathbb{F}^{-}f\ \frac{\sin\left(\frac{\cdot}{2}\right)}{\frac{\cdot}{2}}\right), \\
&= \mathbb{F}^{-}_{x}\left(g\ \frac{\sin\left(\frac{\cdot}{2}\right)}{\frac{\cdot}{2}}\right),\ x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé successivement la relation

$$\chi_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[}(x) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{F}^{-}_{y\to x}\left(\frac{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}{\frac{y}{2}}\right),$$

le changement de variables $\xi - x = t$, la notation

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}e^{-ixt}\frac{\sin(\frac{t}{2})}{\frac{t}{2}},$$

le théorème de transfert dans $L^2(\mathbb{R})$ et la définition de la fonction g.
On en déduit que

$$\mathbb{F}^{+}_{x}h =_{pp} 2\pi g(x)\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}},$$

vu le théorème de Fourier. On a donc obtenu, vu ce qui précède, que, $\forall A > \gamma$, $g(x) = 0$ pour presque tout $x > A$. D'où la conclusion. □

Voici maintenant une conséquence intéressante du théorème de Paley-Wiener. Nous y aurons recours plusieurs fois dans la suite de ce texte.

Proposition 2.1.7. *Soit $\gamma > 0$. Si une fonction f est entière de type exponentiel γ et si sa restriction à l'axe réel appartient à $L^2(\mathbb{R})$, alors il en est de même pour la fonction $D^k f$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$.*
De plus, dans ces conditions, on a l'inégalité suivante :

$$\|D^k f\|_2^{\,2} \leq \gamma^{2k}\|f\|_2^{\,2}. \tag{2.6}$$

Démonstration. Montrons la première partie. Vu le théorème de Paley-Wiener 2.1.4, il existe une fonction g appartenant à $L^2(]-\gamma,\gamma[)$ telle que

$$f(z)=\int_{-\gamma}^{\gamma} g(t)e^{izt}dt,\ z\in\mathbb{C}. \tag{2.7}$$

Il est clair qu'alors la restriction de f à $\mathbb{R}$ est la transformation de Fourier positive de la fonction $g\chi_{]-\gamma,\gamma[}$ et donc le théorème de Plancherel affirme que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\gamma}^{\gamma} |g(x)|^2 dx. \tag{2.8}$$

Ensuite, en dérivant l'expression (2.7) k fois, on obtient

$$D^k f(z) = \int_{-\gamma}^{\gamma} g(t)(it)^k e^{izt}dt,\ z\in\mathbb{C}, \tag{2.9}$$

vu le théorème de dérivation des intégrales paramétriques.
On en tire immédiatement que la restriction de la fonction $D^k f$ à $\mathbb{R}$ est la transformation de Fourier positive dans $L^2(\mathbb{R})$ de la fonction $t\mapsto g(t)\chi_{]-\gamma,\gamma[}(t)(it)^k$ appartenant à $L^2(\mathbb{R})$.
Il s'ensuit que la restriction de la fonction $D^k f$ à $\mathbb{R}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$.
Ensuite, vu le théorème de dérivation des intégrales paramétriques, on obtient que la fonction $D^k f$ vérifie l'équation de Cauchy-Riemann dans $\mathbb{C}$. De fait, on a

$$D_x(D^k f) + iD_y(D^k f) = \int_{-\gamma}^{\gamma} g(t)(it)^k(it)e^{izt}dt + i\int_{-\gamma}^{\gamma} g(t)(it)^k(-t)e^{izt}dt = 0,$$

dans $\mathbb{C}$. Par conséquent, comme f est une fonction appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, la fonction $D^k f$ est une fonction entière.
Il reste à montrer que la fonction $D^k f$ est de type exponentiel γ, ce qui résulte également de l'égalité (2.9). En effet, on a

$$\begin{aligned} |D^k f(z)| &= \left|\int_{-\gamma}^{\gamma} g(t)(it)^k e^{izt}dt\right| \leq \int_{-\gamma}^{\gamma} g(t)|t|^k e^{-\Im(z)t}dt \\ &\leq \gamma^k \int_{-\gamma}^{\gamma} g(t)dt\ e^{\gamma|\Im(z)|} \leq \gamma^k \int_{-\gamma}^{\gamma} g(t)dt\ e^{\gamma|z|},\ z\in\mathbb{C}. \end{aligned}$$

Montrons la seconde partie. Comme on a $D^k f = \mathbb{F}^+(g\chi_{]-\gamma,\gamma[}(it)^k)$ vu (2.9), le théorème de Plancherel donne

$$\int_{\mathbb{R}} |D^k f(x)|^2 dx = 2\pi\int_{-\gamma}^{\gamma} |g(t)|^2 t^{2k} dt \leq 2\pi\gamma^{2k}\int_{-\gamma}^{\gamma} |g(t)|^2 dt.$$

Finalement, vu (2.8), il vient

$$\int_{\mathbb{R}} |D^k f(x)|^2 dx \leq \gamma^{2k}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx,$$

ce qu'il nous fallait. □

2.2 Suites de densité uniforme et fonctions entières de type exponentiel

Dans cette deuxième partie, nous allons démontrer le premier théorème de Duffin-Schaeffer dont voici l'énoncé : *Soit $\gamma > 0$ et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite séparée de densité uniforme d avec $d > \frac{\gamma}{\pi}$. Alors il existe une constante strictement positive N telle que*

$$|f(z)| \leq Ne^{\gamma|y|} \sup_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|,$$

pour toute fonction f entière de type exponentiel γ.

Celui-ci a été proposé par R.J. Duffin et A.C. Schaeffer en 1945 dans leur article intitulé "Power series with bounded coefficients" ([6]). Ce résultat est étroitement lié avec la théorie des frames que les auteurs allaient introduire quelques années plus tard dans leur article intitulé "A Class of Nonharmonic Fourier Series" ([7]) déjà évoqué plus haut. Nous utiliserons le premier théorème de Duffin et Schaeffer dans un des lemmes destiné à faciliter la démonstration du deuxième théorème de Duffin et Schaeffer.

Dans ce paragraphe, nous considérons que si z est un nombre complexe, x est sa partie réelle et y sa partie imaginaire, soit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.

2.2.1 Définition d'une suite de densité uniforme

Définition 2.2.1. Une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{J}}$ de nombres complexes est dite *séparée* s'il existe une constante strictement positive δ telle que

$$|\lambda_n - \lambda_m| \geq \delta, \ \forall n, m \in \mathbb{J}, \ n \neq m. \tag{2.10}$$

Si δ est une constante strictement positive vérifiant 2.10, on dit que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{J}}$ est *$\delta-$séparée.*

Définition 2.2.2. Une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes est dite *de densité uniforme d, $d > 0$,* s'il existe une constante strictement positive L telle que

$$|\lambda_n - \frac{n}{d}| \leq L, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 2.2.3. Notons que l'ensemble des indices d'une suite de densité uniforme est toujours $\mathbb{Z}$. En effet, ceci est clair, vu la définition de la densité uniforme.
De plus, remarquons que si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de densité uniforme d, $d > 0$, une suite définie par une permutation de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est, en général, pas de densité uniforme d. Pour s'en convaincre, il suffit par exemple de considérer la permutation qui consiste à remplacer chaque λ_n par λ_{-n}. En effet, sinon, dans ce cas, il existerait des constantes $L > 0$ et $G > 0$ vérifiant

$$|\lambda_n - \frac{n}{d}| \leq L \ \text{ et } \ |\lambda_{-n} - \frac{n}{d}| \leq G, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

et on aurait donc également

$$|2\lambda_n| = |\lambda_n - \frac{n}{d} + \lambda_n + \frac{n}{d}| \leq |\lambda_n - \frac{n}{d}| + |\lambda_n + \frac{n}{d}| \leq L + G,$$

ce qui est impossible car toute suite de densité uniforme est non bornée.

Exemple 2.2.4. Pour tout réel non nul x, la suite $(n|x|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est $|x|-$séparée de densité uniforme $\frac{1}{|x|}$.

Pour faciliter la démonstration du premier théorème de Duffin et Schaeffer, nous établissons d'abord quelques résultats auxiliaires.

2.2.2 Résultats auxiliaires

Considérons une suite de points $(\lambda_n)_{n>L}$ vérifiant

$$|\lambda_n - n| \leq L, \ \forall n > L, \tag{2.11}$$
$$|\lambda_n - \lambda_m| \geq \delta, \ \forall n, m > L, \ n \neq m, \tag{2.12}$$

où L et δ sont des constantes strictement positives. On suppose donc que λ_n est défini uniquement pour des entiers $n > L$. Par conséquent, on a $\lambda_n \in \{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq 0\}$ pour tout $n > L$.

Théorème 2.2.5. *Soient $L > 0$, $\delta > 0$ et $\gamma \in]0, \pi[$. Alors il existe une constante M strictement positive telle que*

$$|f(z)| \leq Me^{\gamma|y|}, \ \Re z \geq 0,$$

pour toute suite de nombres complexes $(\lambda_n)_{n>L}$ vérifiant les conditions (2.11) et (2.12) et pour toute fonction f holomorphe dans un ouvert contenant le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq 0\}$ et vérifiant

$$|f(z)| \leq e^{\gamma|z|}, \ \Re z \geq 0,$$
$$|f(\lambda_n)| \leq 1, \ n > L.$$

Pour rendre la lecture de la démonstration du théorème 2.2.5 plus agréable, nous allons considérer trois lemmes.

Comme nous aurons souvent besoin du principe de Phragmén-Lindelöf 2.1.5 dans la preuve du théorème 2.2.5, nous commençons par démontrer un résultat qui englobe tous les cas utiles pour cette démonstration.

Lemme 2.2.6. *a) Soient $A > 0$, $B \geq A$ et $\gamma > 0$. Si f est une fonction holomorphe dans un ouvert contenant $\{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq 0\}$ vérifiant*

$$|f(z)| \leq Ae^{\gamma|z|}, \ \Re z \geq 0, \tag{2.13}$$
$$|f(x)| \leq B, \ x \geq 0, \tag{2.14}$$

alors

$$|f(z)| \leq Be^{\gamma|y|}, \ \Re z \geq 0.$$

b) Soient $B > 0$ et $\gamma > 0$. Si f est une fonction entière de type exponentiel γ vérifiant

$$|f(x)| \leq B, \ x \in \mathbb{R}, \tag{2.15}$$

alors

$$|f(z)| \leq Be^{\gamma|y|}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. Montrons la première partie du lemme. Si f est une fonction vérifiant les conditions de a), alors la fonction g_1 définie dans $\{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq 0\}$ par

$$g_1(z) := f(z)e^{i\gamma z}$$

est bornée par B sur le demi-axe réel positif et sur le demi-axe imaginaire positif. De fait,

- si $z = x \geq 0$, alors $|g_1(x)| = |f(x)| \leq B$ vu l'hypotèse (2.14) ;
- si $z = iy$ avec $y \geq 0$, alors $|g_1(iy)| = |f(iy)|e^{-\gamma y} \leq Ae^{\gamma y}e^{-\gamma y} = A \leq B$ vu l'hypothèse (2.13).

Comme on a aussi, vu l'hypothèse (2.13),

$$|g_1(z)| = |f(z)e^{i\gamma z}| = |f(z)| \ e^{-\gamma y} \leq Ae^{\gamma|z|} \text{ dans le premier quadrant,}$$

le principe de Phragmén-Lindelöf 2.1.5 appliqué à la fonction g_1 dans le premier quadrant avec $M := B > 0$, $C := A > 0$, $c := \gamma > 0$ et $0 < \alpha := 1 < \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2$ donne

$$|g_1(z)| = |f(z)e^{i\gamma z}| \leq B \text{ dans le premier quadrant,}$$

c'est-à-dire

$$|f(z)| \leq Be^{\gamma y} = Be^{\gamma|y|} \text{ dans le premier quadrant.} \tag{2.16}$$

Considérons maintenant la fonction g_2 définie dans $\{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq 0\}$ par

$$g_2(z) := f(z)e^{-i\gamma z}.$$

Celle-ci est bornée par B sur le demi-axe réel positif et sur le demi-axe imaginaire négatif. De fait,

- si $z = x \geq 0$, alors $|g_1(x)| = |f(x)| \leq B$ vu l'hypothèse (2.14) ;
- si $z = iy$ avec $y \leq 0$, alors $|g_1(iy)| = |f(iy)|e^{\gamma y} \leq Ae^{\gamma|y|}e^{\gamma y} = A \leq B$ vu l'hypothèse (2.13).

Comme on a aussi, vu l'hypothèse (2.13),

$$|g_2(z)| = |f(z)e^{-i\gamma z}| = |f(z)| \ e^{\gamma y} \leq Ae^{\gamma|z|} \text{ dans le quatrième quadrant,}$$

le principe de Phragmén-Lindelöf 2.1.5 appliqué à la fonction g_2 dans le quatrième quadrant avec $M := B > 0$, $C := A > 0$, $c := \gamma > 0$ et $0 < \alpha := 1 < \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2$ donne

$$|g_2(z)| = |f(z)e^{-i\gamma z}| \leq B \text{ dans le quatrième quadrant,}$$

c'est-à-dire

$$|f(z)| \leq Be^{-\gamma y} = Be^{\gamma |y|} \text{ dans le quatrième quadrant.} \tag{2.17}$$

En rassemblant (2.16) et (2.17), on a la première partie.

Montrons la seconde partie du lemme. Si f est une fonction vérifiant les conditions de b), alors la fonction g_1 définie dans $\mathbb{C}$ par

$$g_1(z) := f(z)e^{i\gamma z}$$

est bornée par B sur le demi-axe réel positif et par une constante C sur le demi-axe imaginaire positif. De fait, f étant de type exponentiel γ par hypothèse, il existe une constante C strictement positive telle que

$$|f(z)| \leq Ce^{\gamma |z|}, \; z \in \mathbb{C}. \tag{2.18}$$

Dès lors, on a

- si $z = x \geq 0$, alors $|g_1(x)| = |f(x)e^{i\gamma x}| = |f(x)| \leq B$ vu l'hypothèse (2.15) ;
- si $z = iy$ avec $y \geq 0$, alors $|g_1(iy)| = |f(iy)e^{-\gamma y}| \leq Ce^{\gamma y}e^{-\gamma y} = C$ vu (2.18).

Comme on a aussi, vu (2.18),

$$|g_1(z)| = |f(z)e^{i\gamma z}| = |f(z)| \; e^{-\gamma y} \leq Ce^{\gamma |z|} \text{ dans le premier quadrant,}$$

le principe de Phragmén-Lindelöf 2.1.5 appliqué à la fonction g_1 dans le premier quadrant affirme que celle-ci est bornée dans le premier quadrant. De la même manière, on obtient que la fonction g_1 est bornée dans le deuxième quadrant. Il s'ensuit que

$$|g_1(z)| \leq C' \text{ dans } \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\},$$

pour une certaine constante C' strictement positive. Dès lors, comme la fonction g_1 est bornée par B sur l'axe réel, le principe de Phragmén-Lindelöf 2.1.5 appliqué à la fonction g_1 dans $\{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\}$ montre que

$$|g_1(z)| \leq B \text{ dans } \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\},$$

c'est-à-dire

$$|f(z)| \leq Be^{\gamma y} = Be^{\gamma |y|} \text{ dans } \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\},$$

vu la définition de g_1. En procédant de manière analogue avec la fonction g_2 définie dans $\mathbb{C}$ par $g_2(z) := f(z)e^{-i\gamma z}$ pour $\{z \in \mathbb{C} : \Im z \leq 0\}$, on obtient la thèse. □

Démontrons à présent un résultat de la théorie des fonctions holomorphes qui nous sera utile dans la démonstration du lemme 2.2.18. Il est dû à J. Jensen.

Juste pour le plaisir, nous commençons par démontrer l'inégalité de Jensen dont nous ne nous servirons pas dans ce texte.

Proposition 2.2.7 (Inégalité de Jensen). *a) Soit $D(0,R)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R et soit f une fonction non nulle holomorphe dans un ouvert contenant $\overline{D(0,R)}$. Soient $N \in \mathbb{N}_0$ et $z_1, z_2, \ldots, z_N$ les zéros de f dans $D(0,R)$ répétés selon leur multiplicité. Alors*

$$|f(0)| \leq \sup_{|z|=R} |f(z)| \prod_{n=1}^{N} \frac{|z_n|}{R}.$$

b) Supposons de plus que $f(0) \neq 0$. Alors on trouve aussi couramment l'inégalité de Jensen sous la forme

$$\int_0^R \frac{\tau(x)}{x} dx \leq \ln\left(\sup_{|z|=R} |f(z)|\right) - \ln|f(0)|,$$

où $\tau(x)$ est le nombre de zéros de f comptés avec leur multiplicité dans le disque fermé de centre 0 et de rayon x.

Démonstration. Montrons la première partie. Considérons les fonctions

$$g(z) := R^N \prod_{n=1}^{N} \frac{z_n - z}{R^2 - \overline{z_n} z}$$

et

$$F(z) := \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Comme on a $R^2 - \overline{z_n}z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{R^2}{\overline{z_n}}$ si $z_n \neq 0$ et $|z| = \left|\frac{R^2}{\overline{z_n}}\right| > R$ puisque $|\overline{z_n}| < R$, la fonction g est définie et holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{D(0,R)}$. De plus, comme les fonctions f et g ont les mêmes zéros avec la même multiplicité dans $\overline{D(0,R)}$, la fonction F est elle aussi définie et holomorphe sur un ouvert contenant le disque fermé $\overline{D(0,R)}$. Ensuite, on a

$$|F(z)| = |f(z)| \text{ si } |z| = R.$$

En effet, si on écrit z sous la forme $z = Re^{i\theta}$, on a

$$|g(z)| = \prod_{n=1}^{N} \frac{R|z_n - z|}{|R^2 - \overline{z_n}z|} = \prod_{n=1}^{N} \frac{|z_n - Re^{i\theta}|}{|R - \overline{z_n}e^{i\theta}|} = 1$$

car $\overline{z_n - Re^{i\theta}} = \overline{z_n} - Re^{-i\theta} = -e^{-i\theta}(R - \overline{z_n}e^{i\theta})$. Le principe du maximum implique alors que

$$|F(z)| \leq \sup_{|z|\leq R} |F(z)| = \sup_{|z|=R} |F(z)| = \sup_{|z|=R} |f(z)| \text{ si } |z| \leq R.$$

En particulier, en $z = 0$, ceci donne

$$|F(0)| \leq \sup_{|z|=R} |f(z)|.$$

Donc, vu la définition de F,

$$|f(0)| \leq \sup_{|z|=R} |f(z)|\ |g(0)| = \sup_{|z|=R} |f(z)| \prod_{n=1}^{N} \frac{|z_n|}{R}.$$

c'est-à-dire la thèse.
Passons maintenant à la seconde partie. Si $\tau(x)$ est le nombre de zéros de f dans le disque fermé de centre 0 et de rayon x, alors on a

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{R}{|z_n|}\right) = \sum_{n=1}^{N} \int_{|z_n|}^{R} \frac{dx}{x} = \int_0^R \frac{\tau(x)}{x} dx,$$

la dernière égalité ayant été obtenue comme suit. Quitte à les renuméroter, on peut supposer que les zéros $z_1, \ldots, z_n$ de f dans $D(0,R)$ soient ordonnés de la manière suivante :

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq ... \leq |z_N| < R.$$

On a alors

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{|z_n|}^{R} \frac{dx}{x} = \sum_{n=1}^{N-1} n \int_{|z_n|}^{|z_{n+1}|} \frac{dx}{x} + N \int_{|z_N|}^{R} \frac{dx}{x},$$

ce qu'on peut réécrire

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{|z_n|}^{R} \frac{dx}{x} = \sum_{n=0}^{N} n \int_{|z_n|}^{|z_{n+1}|} \frac{dx}{x},$$

où $z_0 := 0$ et $z_{N+1} = R$. Nous remplaçons alors cette dernière somme par la fonction $\tau(x)$ sous l'intégrale, exprimant ainsi qu'on intègre autant de fois sur l'intervalle $]z_n, z_{n+1}[$ qu'il y a de zéros dans le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq x\}$ quel que soit x dans l'intervalle $]z_n, z_{n+1}[$, c'est-à-dire n fois. On a donc obtenu

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{R}{|z_n|}\right) = \int_0^R \frac{\tau(x)}{x} dx, \tag{2.19}$$

ce qu'il nous fallait.
Dès lors, vu la première partie, on obtient

$$\begin{aligned} \ln|f(0)| &\leq \ln\left(\sup_{|z|=R} |f(z)| \prod_{n=1}^{N} \frac{|z_n|}{R}\right) = \ln\left(\sup_{|z|=R} |f(z)|\right) + \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{|z_n|}{R}\right) \\ &= \ln\left(\sup_{|z|=R} |f(z)|\right) - \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{R}{|z_n|}\right) = \ln\left(\sup_{|z|=R} |f(z)|\right) - \int_0^R \frac{\tau(x)}{x} dx, \end{aligned}$$

d'où la conclusion. □

Rappelons maintenant une conséquence de la formule intégrale de Cauchy qui nous servira dans la preuve de la formule de Jensen. Pour plus de détail à ce propos, voir par exemple [1].

Proposition 2.2.8 (Propriété de la moyenne). *Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, si $z_0 \in \Omega$ et si $0 < r < d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Voici un calcul qui nous servira par la suite.

Lemme 2.2.9. *On a*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Démonstration. Notons $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$. On a

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(\frac{\pi}{2} - y)) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$$

vu le changement de variable $y = \frac{\pi}{2} - x$ et

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\pi - y)) dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin x) dx$$

vu le changement de variable $y = \pi - x$. Dès lors, on a

$$I = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin x) dx \right) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin x) dx$$

et

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) dx - \frac{\pi}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin y) dy - \frac{\pi}{2} \ln 2 = I - \frac{\pi}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

vu ce qui précède et le changement de variable $x = \frac{y}{2}$. On conclut aussitôt. □

Le résultat suivant est également tiré de la théorie des fonctions de variables complexes. Celui-ci justifie entre autre l'existence de l'intégrale $\int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| d\theta$ lorsque la fonction f est holomorphe sur un ouvert contenant le disque fermé $\overline{D(0,R)}$ et qu'elle ne s'annule pas sur le disque ouvert $D(0,R)$.

Lemme 2.2.10. *Soit $R > 0$ et soit $D(0,R)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R. Si f est une fonction holomorphe dans un ouvert Ω contenant $\overline{D(0,R)}$ ne s'annulant pas sur $D(0,R)$, alors*

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\theta})|d\theta.$$

Démonstration. Si f ne s'annule pas sur le cercle $\mathcal{C}(0,R) = \partial D(0,R)$, le résultat découle directement de la propriété de la moyenne 2.2.8 appliquée à la fonction $\ln|f|$ en 0.
Supposons maintenant que f a exactement un zéro simple $a = Re^{i\alpha}$ sur $\mathcal{C}(0,R)$. Alors il existe une fonction g holomorphe sur Ω telle que $g(a) \neq 0$ et $f(z) = (z-a)g(z)$ sur Ω. Dès lors, la fonction g ne s'annule pas sur $\overline{D(0,R)}$ et vu la propriété de la moyenne 2.2.8 appliquée à la fonction $\ln|g|$ en 0, on a

$$\ln|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|g(Re^{i\theta})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\ln|f(Re^{i\theta})| - \ln|Re^{i\theta} - Re^{i\alpha}|\right) d\theta.$$

La fonction $\ln|Re^{i\theta} - Re^{i\alpha}|$ est intégrable sur $]0,2\pi[$ car si $r \in]0,1[$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to\alpha} |\theta-\alpha|^r \left|\ln|R(e^{i\theta} - e^{i\alpha})|\right| &= \lim_{\theta\to\alpha} |\theta-\alpha|^r \left|\ln\left|Re^{i\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)}\right)\right|\right| \\ &= \lim_{\theta\to\alpha} |\theta-\alpha|^r \left|\ln\left|2R\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\right|\right| = 0.\end{aligned}$$

Comme la fonction $\ln|g(Re^{i\theta})| = \ln|f(Re^{i\theta})| - \ln|Re^{i\theta} - Re^{i\alpha}|$ est aussi intégrable sur l'intervalle $]0,2\pi[$, il s'ensuit que la fonction $\ln|f(Re^{i\theta})|$ est intégrable sur $]0,2\pi[$ et on peut écrire

$$\ln|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\theta})|d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|Re^{i\theta} - Re^{i\alpha}|d\theta.$$

Dès lors, comme on a

$$\ln|g(0)| = \ln|f(0)| - \ln|a| = \ln|f(0)| - \ln R,$$

si on montre que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|Re^{i\theta} - Re^{i\alpha}|d\theta = \ln R,$$

alors on a la conclusion.
Tout d'abord, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|Re^{i\theta} - Re^{i\alpha}|d\theta = \ln R + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|e^{i\theta} - e^{i\alpha}|d\theta.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \ln|e^{i\theta}-e^{i\alpha}|d\theta &= \int_0^{2\pi} \ln|e^{i\alpha}(1-e^{i(\theta-\alpha)})|d\theta = \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln|1-e^{ix}|dx \\
&= \int_0^{2\pi} \ln|1-e^{ix}|dx = \int_0^{2\pi} \ln|e^{\frac{ix}{2}}(e^{\frac{-ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}})|dx \\
&= \int_0^{2\pi} \ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|dx = 2\pi\ln 2 + \int_0^{2\pi} \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx \\
&= 2\pi\ln 2 + 2\int_0^{\pi} \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx = 2\pi\ln 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin y)dy \\
&= 2\pi\ln 2 + 4(-\frac{\pi}{2}\ln 2) = 0,
\end{aligned}$$

où on a successivement fait le changement de variable $\theta = x+\alpha$, utilisé le fait que la fonction $\ln|1-e^{ix}|$ est 2π-périodique, fait le changement de variable $x = 2y$ et utilisé le lemme 2.2.9.
Montrons le cas général. Comme f est holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{D(0,R)}$ ne s'annulant pas sur $D(0,R)$, la fonction a au plus un nombre fini de zéros sur $\mathcal{C}(0,R)$. En effet, sinon il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{C}(0,R)$ telle que $f(z_n)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}_0$ et telle que $z_n \neq z_m$ si $n\neq m$. Comme il s'agit d'une suite bornée, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente vers un point de $\mathcal{C}(0,R)$, ce qui est impossible car la fonction f serait alors identiquement nulle sur Ω. Notons $a_1 = Re^{i\alpha_1},\ldots,a_N = Re^{i\alpha_N}$ les zéros de f dans $\mathcal{C}(0,R)$ répétés selon leur multiplicité. Il existe alors une fonction h holomorphe sur l'ouvert Ω de f telle que

$$h(a_i)\neq 0 \text{ pour } i=1,\ldots,N$$
$$f(z) = (z-a_1)\ldots(z-a_N)g(z) \text{ sur } \Omega.$$

Dès lors, de la même manière que dans la première partie, on obtient

$$\ln|f(0)| - N\ln R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\theta})|d\theta - \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|Re^{i\theta}-Re^{i\alpha_i}|d\theta.$$

On peut montrer de manière analogue à la première partie que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|Re^{i\theta}-Re^{i\alpha_i}|d\theta = \ln R, \text{ pour } i=1,\ldots,N.$$

D'où la thèse. □

Voici maintenant la formule de Jensen dont nous nous servirons par la suite.

Proposition 2.2.11 (Formule de Jensen). *Soit $R>0$ et soit $D(0,R)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R. Si f une fonction non nulle holomorphe dans un ouvert contenant*

$\overline{D(0,R)}$, *alors*

$$\ln\left|\frac{D^m f(0)}{m!}\right| + m\ln R = -\int_0^R \frac{\tau(x)}{x}dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\theta})|d\theta,$$

où m *est l'ordre de* 0 *comme zéro de* f *et* $\tau(x)$ *est le nombre de zéros de* f *comptés avec leur multiplicité dans le disque fermé de centre* 0 *et de rayon* x *privé du point* 0.

Démonstration. Comme la fonction f est non nulle et holomorphe sur $D(0,R)$, elle ne possède qu'un nombre fini de zéros dans $D(0,R)$. Soient alors $z_1,\dots,z_N$ les zéros de f dans $D(0,R)\setminus\{0\}$ répétés selon leur multiplicité. Considérons les fonctions

$$g(z) := \frac{(-z)^m}{R^m}\prod_{n=1}^N \frac{R(z_n - z)}{R^2 - \overline{z_n}z}$$

et

$$F(z) := \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Par le même argument que dans la preuve de l'inégalité de Jensen, la fonction F est holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{D(0,R)}$ et ne possède pas de zéros dans $D(0,R)$. Dès lors, vu le lemme 2.2.10 appliqué à la fonction $\ln|F(z)|$ en 0, on a

$$\ln|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|F(Re^{i\theta})|d\theta. \tag{2.20}$$

De plus, de la même manière que dans la preuve de l'inégalité de Jensen, on a

$$|F(z)| = |f(z)| \text{ si } |z| = R. \tag{2.21}$$

Ensuite, si l'on écrit

$$F(z) = \frac{f(z)}{g_1(z)g_2(z)}$$

avec

$$g_1(z) := \frac{1}{R^m}\prod_{n=1}^N \frac{R(z-z_n)}{R^2-\overline{z_n}z} \text{ et } g_2(z) = (-z)^m,$$

on obtient que

$$\ln|F(0)| = \ln\left|\left(\frac{f}{g_2}\right)(0)\right| - \ln|g_1(0)| = \ln\left|\left(\frac{f}{g_2}\right)(0)\right| + m\ln R + \sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{R}{|z_n|}\right).$$

Dès lors, vu l'égalité (2.19) obtenue dans la preuve de l'inégalité de Jensen et vu (2.20) et (2.21), on a

$$\ln\left|\left(\frac{f}{g_2}\right)(0)\right| + m\ln R = -\int_0^R \frac{\tau(x)}{x}dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\theta})|d\theta,$$

où $\tau(x)$ est le nombre de zéros de f dans le disque fermé de centre 0 et de rayon x privé du point 0. De là, si on montre que

$$\left(\frac{f}{g_2}\right)(0) = \frac{D^m f(0)}{m!},$$

la démonstration est finie. En fait ceci résulte directement de la formule de Taylor. En effet, celle-ci donne

$$f(z) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{z^l}{l!} D^l f(0) = \sum_{l=m}^{+\infty} \frac{z^l}{l!} D^l f(0) \text{ si } z \in D(0,R)$$

en tenant compte du fait que 0 est un zéro de f de multiplicité m. D'où

$$\left(\frac{f}{g_2}\right)(z) = \frac{f(z)}{z^m} = \sum_{l=m}^{+\infty} \frac{z^{l-m}}{l!} D^l f(0) \text{ si } z \in D(0,R).$$

En prenant cette égalité en $z = 0$, on a la conclusion. □

Rappelons ici une conséquence importante du théorème d'Arzela-Ascoli concernant les fonctions holomorphes : le théorème de Montel. Tout d'abord, voici quelques définitions pour mettre les choses au point.

Définition 2.2.12. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathbf{C}_0(\Omega)$ est dit *borné* si pour tout compact K de Ω, il existe une constante strictement positive C_K telle que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_K |f| \leq C_K.$$

Définition 2.2.13. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathbf{C}_0(\Omega)$ est dit *borné* s'il est borné comme sous-ensemble de $\mathbf{C}_0(\Omega)$.

Définition 2.2.14. Une suite de $\mathcal{O}(\Omega)$ est dite *bornée* si l'ensemble de ses éléments l'est.

Définition 2.2.15. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{O}(\Omega)$ *converge dans* $\mathcal{O}(\Omega)$ *vers un élément* f *de* $\mathcal{O}(\Omega)$ si les fonctions f_n convergent uniformément vers f sur tout compact de Ω.

Théorème 2.2.16 (Montel). *Si* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{C}$, *toute suite bornée de* $\mathcal{O}(\Omega)$ *possède une sous-suite convergente dans* $\mathcal{O}(\Omega)$.

Nous ne donnons pas ici la démonstration de ce résultat. Elle se trouve par exemple dans [14].

Rappelons la définition des limites supérieures et inférieures d'une suite de nombres réels.

Définition 2.2.17. Si $(r_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels, alors

$$\limsup_{m\to+\infty} r_m := \lim_{M\to+\infty} \sup_{m\geq M} r_m$$

et

$$\liminf_{m\to+\infty} r_m := \lim_{M\to+\infty} \inf_{m\geq M} r_m.$$

Le résultat suivant, bien que plus faible que le théorème 2.2.5, contient l'essentiel de la démonstration de ce théorème. Nous faisons remarquer que c'est ici qu'apparaît pour la première fois l'hypothèse $\gamma \in]0,\pi[$. Nous l'utilisons une seule fois, à la fin de la démonstration, après l'application de la formule de Jensen. Cette hypothèse nous suivra tout au long des résultats postérieurs.

Théorème 2.2.18. *Soient $L > 0$, $\delta > 0$ et $0 < \gamma < \pi$. Alors il existe une constante strictement positive M telle que*

$$|f(x)| \leq M,\ x \geq 0,$$

pour toute suite de nombres complexes $(\lambda_n)_{n>L}$ vérifiant (2.11) et (2.12) et pour toute fonction f holomorphe dans un ouvert contenant $\{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq 0\}$ et vérifiant

$$|f(z)| \leq e^{\gamma|z|},\ \Re z \geq 0, \tag{2.22}$$

$$|f(\lambda_n)| \leq 1,\ n > L, \tag{2.23}$$

$$f|_{\mathbb{R}}(x) = O(1),\ x \to +\infty. \tag{2.24}$$

Démonstration. Soient L, δ, γ fixés. On doit montrer qu'il existe une constante M telle que $|f(x)| \leq M,\ x \geq 0$, pour toute suite $(\lambda_n)_{n>L}$ vérifiant (2.11) et (2.12) et pour toute fonction f holomorphe dans un ouvert contenant $\{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq 0\}$ vérifiant (2.22), (2.23) et (2.24). Procédons par l'absurde et supposons que pour tout $\nu \in \mathbb{N}_0$, il existe une suite $(\lambda_n^{(\nu)})_{n>L}$ vérifiant (2.11) et (2.12) et une fonction f_ν vérifiant les conditions de l'énoncé telles que

$$c_\nu := \sup_{x\geq 0} |f_\nu(x)| > \nu.$$

Comme pour tout $\nu \in \mathbb{N}_0$, on a

$$|f_\nu(z)| \leq e^{\gamma|z|},\ \Re z \geq 0 \text{ et } |f_\nu(x)| \leq c_\nu,\ x \geq 0,$$

avec $c_\nu > 1$, la première partie du lemme 2.2.6 affirme que pour tout $\nu \in \mathbb{N}_0$, on a

$$|f_\nu(z)| \leq c_\nu e^{\gamma|y|},\ \Re z \geq 0. \tag{2.25}$$

Ensuite, par définition de la borne supérieure, pour tout $\nu \in \mathbb{N}_0$, il existe $x_\nu \geq 0$ tel que

$$|f_\nu(x_\nu)| \geq c_\nu - \frac{c_\nu}{\nu}. \tag{2.26}$$

Il s'ensuit que $f_\nu(x_\nu) \to +\infty$ si $\nu \to +\infty$ et par conséquent, vu l'hypothèse (2.22), que $x_\nu \to +\infty$ si $\nu \to +\infty$. Cela étant, pour tout $\nu \in \mathbb{N}_0$, définissons la fonction ϕ_ν par

$$\phi_\nu(z) := \frac{f_\nu(z + [x_\nu])}{c_\nu},\ \text{où } [x_\nu] \text{ désigne la partie entière de } x_\nu.$$

Cette fonction est définie et holomorphe dans un ouvert contenant $\{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq -[x_\nu]\}$. Montrons qu'elle vérifie

$$|\phi_\nu(z)| \leq e^{\gamma|y|}, \ \Re z \geq -[x_\nu]; \tag{2.27}$$

$$1 - \frac{1}{\nu} \leq \sup_{x\in[0,1]} |\phi_\nu(x)| \leq 1; \tag{2.28}$$

$$|\phi_\nu(\mu_n^{(\nu)})| \leq \frac{1}{c_\nu}, \ n > L - [x_\nu], \text{ où } \mu_n^{(\nu)} := \lambda_{n+[x_\nu]}^{(\nu)} - [x_\nu]. \tag{2.29}$$

L'inégalité 2.27 est immédiate vu l'inégalité (2.25) et la définition de ϕ_ν. Ensuite, vu l'inégalité (2.26) et les définitions de ϕ_ν et de c_ν, on a

$$\sup_{x\in[0,1]} |\phi_\nu(x)| = \frac{1}{c_\nu} \sup_{x\in[0,1]} |f_\nu(x + [x_\nu])| \geq \frac{1}{c_\nu}|f_\nu(x_\nu)| \geq 1 - \frac{1}{\nu},$$
$$|\phi_\nu(x)| \leq 1, \ x \geq 0,$$

d'où la double inégalité 2.28. Enfin, vu l'hypothèse (2.23), on a

$$|\phi_\nu(\mu_n^{(\nu)})| = \frac{1}{c_\nu}|f_\nu(\mu_n^{(\nu)} + [x_\nu])| = \frac{1}{c_\nu}|f_\nu(\lambda_{n+[x_\nu]}^{(\nu)})| \leq \frac{1}{c_\nu},$$

si $n > L - [x_\nu]$ et l'inégalité (2.29) est vérifiée.
Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, considérons maintenant l'ouvert

$$\Omega_m := \{z \in \mathbb{C} : \Re z > -m\}.$$

Soit $m = 1$. Alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}_0$ tel que pour tout $\nu \geq N_1$, on a $\Omega_1 \subset \Omega_\nu$, donc tel que la fonction ϕ_ν soit holomorphe dans l'ouvert Ω_1 pour tout $\nu \geq N_1$. La suite $(\phi_\nu)_{\nu\geq N_1}$ est bornée dans $\mathcal{O}(\Omega_1)$. En effet, si K est un compact fixé de Ω_1, par l'inégalité (2.27), on a

$$|\phi_\nu(z)| \leq e^{\gamma|y|}, \ \forall\nu \geq N_1, \ \forall z \in K$$

vu que $K \subset \Omega_1 \subset \Omega_\nu$, pour tout $\nu \geq N_1$. Dès lors, on a

$$\sup_{\nu\geq N_1} \sup_{z\in K} |\phi_\nu(z)| \leq \sup_{\nu\geq N_1} \sup_{z\in K} e^{\gamma|y|} = \sup_{z\in K} e^{\gamma|y|} = C_K.$$

Vu le théorème de Montel 2.2.16, il existe donc une sous-suite de $(\phi_\nu)_{\nu\geq N_1}$ qui converge dans $\mathcal{O}(\Omega_1)$. Soit $(\phi_{k_1(\nu)})_{\nu\geq N_1}$ cette sous-suite et soit F_1 sa limite. Soit $m = 2$. Alors il existe $N_2 \in \mathbb{N}_0$ tel que pour tout $\nu \geq N_2$, la fonction ϕ_ν est holomorphe dans l'ouvert Ω_2. De la même manière que dans le cas $m = 1$, la suite $\left(\phi_{k_1(\nu)}\right)_{\nu\geq N_2}$ est bornée dans $\mathcal{O}(\Omega_2)$. Dès lors, vu le théorème de Montel, on peut en extraire une sous-suite convergente dans $\mathcal{O}(\Omega_2)$. Soit $(\phi_{k_2(\nu)})_{\nu\geq N_2}$ cette sous-suite et soit F_2 sa limite. Par unicité de la limite, on a $F_2 = F_1$ dans Ω_1. Soit $m = 3$. Alors il existe $N_3 \in \mathbb{N}_0$ tel que pour tout $\nu \geq N_3$, la fonction ϕ_ν soit holomorphe dans l'ouvert Ω_3. De la même manière que dans les cas précédents, la suite $\left(\phi_{k_2(\nu)}\right)_{\nu\geq N_3}$ est bornée dans $\mathcal{O}(\Omega_3)$. Dès lors, vu le théorème de Montel, on peut en extraire une sous-suite convergente dans $\mathcal{O}(\Omega_3)$. Soit $(\phi_{k_3(\nu)})_{\nu\geq N_3}$ cette sous-suite et soit F_3 sa limite. Par unicité de la limite, on a $F_3 = F_2$ dans Ω_2. En continuant de cette manière, on construit une suite de fonctions $(F_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ telles que

$$F_m \in \mathcal{O}(\Omega_m),$$
$$F_{m+1} = F_m \text{ dans } \Omega_m.$$

Définissons alors la fonction φ dans $\mathbb{C}$ par

$$\varphi := F_m \text{ dans } \Omega_m.$$

Vu ce qui précède, cette définition a un sens et φ est une fonction entière. De plus, vu les inégalités (2.27) et (2.28), par passage à la limite, on a

$$|\varphi(z)| \leq e^{\gamma|y|},\ z \in \mathbb{C}, \tag{2.30}$$
$$\sup_{x\in[0,1]} |\varphi(x)| = 1. \tag{2.31}$$

Par ailleurs, quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(\mu_n^{(\nu)})_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ est une suite convergente. En effet, on a

$$|\mu_n^{(\nu)} - n| = |\lambda_{n+[x_\nu]}^{(\nu)} - (n + [x_\nu])| \leq L,\ n > L - [x_\nu], \tag{2.32}$$

et comme pour tout n fixé, il existe $\nu \in \mathbb{N}_0$ tel que $n > L - [x_\nu]$, la suite $(\mu_n^{(\nu)})_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ est bornée. Notons μ_n sa limite. Ainsi, vu l'inégalité (2.29), par passage à la limite, on a

$$\varphi(\mu_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2.33}$$

De plus, comme pour tout $\nu \in \mathbb{N}_0$, on a (2.32) et

$$|\mu_n^{(\nu)} - \mu_m^{(\nu)}| = |\lambda_{n+[x_\nu]}^{(\nu)} - \lambda_{m+[x_\nu]}^{(\nu)}| \geq \delta,\ \forall n, m > L - [x_\nu],\ n \neq m,$$

par passage à la limite, la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie

$$|\mu_n - n| \leq L,\ n \in \mathbb{Z}, \tag{2.34}$$
$$|\mu_n - \mu_m| \geq \delta,\ n \neq m, \tag{2.35}$$

d'où elle est de densité uniforme 1.
Ensuite, d'une part, comme φ est une fonction entière non nulle vu (2.31), la formule de Jensen 2.2.11 appliquée à la fonction φ donne

$$\begin{aligned}\int_1^R \frac{\tau(x)}{x}dx &= \int_0^R \frac{\tau(x)}{x}dx - \int_0^1 \frac{\tau(x)}{x}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\varphi(Re^{i\theta})|d\theta - m\ln R - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\varphi(e^{i\theta})|d\theta, \end{aligned}\tag{2.36}$$

pour tout $R > 0$, où m est l'ordre de 0 comme zéro de φ et $\tau(x)$ est le nombre de zéros de φ dans le disque fermé de centre 0 et de rayon x privé du point 0. Ensuite, vu l'inégalité (2.30), on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\varphi(Re^{i\theta})|d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma R|\sin\theta|d\theta = \frac{\gamma R}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta = \frac{2\gamma R}{\pi},\ \forall R > 0.$$

On a donc obtenu que

$$\frac{1}{R}\int_1^R \frac{\tau(x)}{x}dx \le \frac{2\gamma}{\pi} - m\frac{\ln R}{R} - \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} \ln|\varphi(e^{i\theta})|d\theta,\ \forall R > 0.$$

Dès lors, il vient

$$\limsup_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int_0^R \frac{\tau(x)}{x}dx \le \frac{2\gamma}{\pi} < 2. \tag{2.37}$$

car $\gamma < \pi$.
D'autre part, vu (2.34), si $x > L$, on a

$$\begin{gathered} |\mu_0| = |\mu_0 - 0| \le L < x, \\ |\mu_i| = |\mu_i - i| + i \le L + i \le x \\ |\mu_{-i}| = |\mu_{-i} + i| + i \le L + i \le x, \end{gathered}$$

pour $0 < i \le [x - L]$. Vu (2.33) et vu (2.35), il s'ensuit que

$$\tau(x) \ge 2[x - L] + 1 - 1 > 2(x - L - 1) \text{ si } x > L,$$

en tenant compte du fait qu'on a peut-être un des μ_n, $n = -[x-L], \ldots, 0, \ldots, [x-L]$, qui vaut zéro. Dès lors, si $R > L$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^R \frac{\tau(x)}{x}dx &= \int_0^L \frac{\tau(x)}{x}dx + \int_L^R \frac{\tau(x)}{x}dx - \int_0^1 \frac{\tau(x)}{x}dx \\ &\ge \int_L^R \frac{\tau(x)}{x}dx - \int_0^1 \frac{\tau(x)}{x}dx \\ &\ge \int_L^R \frac{2(x-L-1)}{x}dx - \int_0^1 \frac{\tau(x)}{x}dx \\ &= 2(R-L) - 2(L+1)(\ln R - \ln L) - \int_0^1 \frac{\tau(x)}{x}dx, \end{aligned}$$

donc

$$\limsup_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int_1^R \frac{\tau(x)}{x}dx \ge \limsup_{R\to+\infty}\left(2 - 2(L+1)\frac{\ln R}{R}\right) = 2,$$

ce qui nous amène à une contradiction vu (2.37) et le théorème est ainsi établi. $\square$

Rappelons les résultats suivants. Ils nous serons utiles dans la preuve du théorème 2.2.5.

Proposition 2.2.19. *Si* $(r_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *est une suite de nombres réels, alors*

$$\liminf_{m\to+\infty} r_m \leq \limsup_{m\to+\infty} r_m.$$

Proposition 2.2.20. *Soit* $(r_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels. Si*

$$\liminf_{m\to+\infty} r_m = \limsup_{m\to+\infty} r_m = R \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\},$$

alors $\lim_{m\to+\infty} r_m$ *existe et vaut* R.

A présent, nous pouvons passer à la démonstration du théorème 2.2.5 dont l'énoncé est rappelé ici : *Soient* $L>0$, $\delta>0$ *et* $\gamma\in]0,\pi[$. *Alors il existe une constante* M *strictement positive telle que*

$$|f(z)| \leq Me^{\gamma|y|},\ \Re z \geq 0,$$

pour toute suite de nombres complexes $(\lambda_n)_{n>L}$ *vérifiant* (2.11) *et* (2.12) et pour toute fonction f holomorphe dans un ouvert contenant le demi-plan $\{z\in\mathbb{C} : \Re z \geq 0\}$ et vérifiant

$$|f(z)| \leq e^{\gamma|z|},\ \gamma<\pi, \tag{2.38}$$

$$|f(\lambda_n)| \leq 1,\ n>L. \tag{2.39}$$

Démonstration du théorème 2.2.5. Soit f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. Posons $\rho := \limsup_{x\to+\infty}\frac{\ln|f(x)|}{x}$. Si $f(x)=0$, on convient de poser $\ln|f(x)|=-\infty$. Montrons qu'on peut supposer que ρ est un nombre réel. En effet, premièrement, supposons que $\rho=+\infty$. Par conséquent, comme $\left(\sup_{x\geq M}\frac{\ln|f(x)|}{x}\right)_{M\in\mathbb{N}_0}$ est une suite décroissante, on aurait

$$\sup_{x\geq M}\frac{\ln|f(x)|}{x} = +\infty,\ \text{pour tout } M\geq 0.$$

Comme, par hypothèse, on a $|f(z)|\leq e^{\gamma|z|}$ pour tout $z\in\mathbb{C}$, on aurait également

$$\gamma = \sup_{x\geq M}\frac{\ln(e^{\gamma|x|})}{x} = +\infty,$$

ce qui impossible. Deuxièmement, supposons que $\rho=-\infty$. Par conséquent, vu les propositions 2.2.19 et 2.2.20, on aurait

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln|f(x)|}{x} = -\infty$$

donc nécessairement

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)| = 0.$$

Dès lors, les hypothèses du théorème 2.2.18 sont vérifiées et celui-ci donne

$$|f(x)| \le M,\ x \ge 0,$$

où la constante M peut être choisie indépendamment de la fonction f. Dès lors, la première partie du lemme 2.2.6 montre que

$$|f(z)| \le \sup\{M, 1\}\ e^{\gamma|y|},\ \Re z \ge 0.$$

Comme la constante M est indépendante de la fonction f, on a la thèse. Nous pouvons donc maintenant supposer que ρ est un nombre réel.
Soit $a > \frac{\rho+|\rho|}{2}$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < a$ et $\varepsilon < \frac{\pi-\gamma}{2}$. Considérons les fonctions

$$g_\nu(z) := f(z)e^{-az}\sum_{p=0}^{\nu}\frac{(\varepsilon z)^p}{p!},\ \nu \in \mathbb{N}_0$$

définies et holomorphes dans un ouvert contenant $\{z \in \mathbb{C} : \Re z \ge 0\}$. Pour tout $\nu \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\left|\sum_{p=0}^{\nu}\frac{(\varepsilon z)^p}{p!}\right| \le \sum_{p=0}^{\nu}\frac{\varepsilon^p|z|^p}{p!} \le e^{\varepsilon|z|}.$$

Il s'ensuit alors que

$$|g_\nu(z)| \le |f(z)e^{-az}|\ e^{\varepsilon|z|} \le e^{\gamma|z|}e^{-a\Re z}e^{\varepsilon|z|} \le e^{(\gamma+\varepsilon)|z|} \le e^{\kappa|z|},\ \Re z \ge 0,$$

où $\kappa := \frac{\gamma+\pi}{2} < \pi$, vu l'hypothèse (2.38) et la définition de ε. Si on pose $\Re\lambda_n = \alpha_n$ et $\Im\lambda_n = \beta_n$, alors

$$|g_\nu(\lambda_n)| \le |f(\lambda_n)|\ e^{-a\alpha_n}e^{\varepsilon|\lambda_n|} \le e^{\varepsilon|\beta_n|} \le e^{\varepsilon L},\ n > L,$$

vu l'hypothèse (2.39) et vu que $\varepsilon|\lambda_n| - a\alpha_n \le \varepsilon(\alpha_n + |\beta_n|) - \varepsilon\alpha_n = \varepsilon|\beta_n| \le \varepsilon L$, si $n > L$. En effet, si $n > L$, on a $\alpha_n = \Re\lambda_n \ge 0$ vu la condition (2.11) et

$$|\beta_n| = |\Im\lambda_n| = |\Im(\lambda_n - n)| \le |\lambda_n - n| \le L,$$

également vu (2.11). De plus, $g_\nu(x) \to 0$ si $x \to +\infty$ avec a, ε et ν fixés. En effet, comme on a toujours $a > \rho$, quel que soit $0 < \delta < a - \rho$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\rho < \sup_{x \ge M}\frac{\ln|f(x)|}{x} < a - \delta,$$

donc tel que

$$\frac{\ln|f(x)|}{x} < a - \delta,\ \forall x \ge M.$$

Par conséquent, on a

$$|f(x)| \le e^{xa}e^{-x\delta},\ \forall x \ge M.$$

Dès lors, il vient

$$|g_\nu(x)| \leq |f(x)|e^{-ax}\left|\sum_{p=0}^{\nu}\frac{(\varepsilon x)^p}{p!}\right| \leq e^{-\delta x}\left|\sum_{p=0}^{\nu}\frac{(\varepsilon x)^p}{p!}\right|,\ \forall x \geq M,\ \forall \nu \in \mathbb{N}_0$$

et comme le second membre de cette inégalité tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, on a bien $g_\nu(x) \to 0$ si $x \to +\infty$, pour tout $\nu \in \mathbb{N}_0$. En particulier, comme, quel que soit $\nu \in \mathbb{N}_0$, g_ν est une fonction continue, elle est bornée sur le demi axe réel positif.
Les fonctions $e^{-\varepsilon L}g_\nu$ satisfont donc les conditions du théorème 2.2.18 si on remplace γ par κ. Il s'ensuit que

$$e^{-\varepsilon L}|g_\nu(x)| \leq M,\ x \geq 0,$$

où la constante M est indépendante de f, L, ν, ε et a. Dès lors,

$$e^{-\varepsilon L}|f(x)|e^{-ax}e^{\varepsilon x} \leq M,\ x \geq 0,$$

car $g_\nu(z) \to f(z)e^{-az}e^{\varepsilon z}$ si $\nu \to +\infty$. Donc

$$|f(x)| \leq e^{(a-\varepsilon)x}e^{\varepsilon L}M,\ x \geq 0.$$

Deux cas sont alors possibles : $\rho > 0$ et $\rho \leq 0$. Supposons que $\rho > 0$. Il n'y a pas de restriction à supposer avoir $0 < \varepsilon < \rho$. Si on laisse tendre a vers ρ, on obtient

$$|f(x)| \leq e^{(\rho-\varepsilon)x}e^{\varepsilon L}M,\ x \geq 0.$$

Il s'ensuit que

$$\rho = \limsup_{x\to+\infty}\frac{\ln|f(x)|}{x} \leq \limsup_{x\to+\infty}\frac{(\rho-\varepsilon)x + \varepsilon L + \ln M}{x} = \rho - \varepsilon,$$

ce qui est absurde car on a $\varepsilon > 0$. On a donc montré que $\rho \leq 0$. On peut donc laisser tendre a et ε vers 0, ce qui donne

$$|f(x)| \leq M,\ x \geq 0.$$

Dès lors, la première partie du lemme 2.2.6 appliquée à la fonction f avec $A = 1$ et $B = M$ montre que

$$|f(z)| \leq M'e^{\gamma|y|},\ \Re z \geq 0 \text{ où } M' := \sup\{M, 1\},$$

c'est-à-dire la thèse. □

Le résultat suivant est un corollaire du théorème 2.2.5. Ce résultat est très proche du premier théorème de Duffin-Schaeffer. C'est à lui seul que nous ferons appel dans la démonstration de celui-ci.

Corollaire 2.2.21. *Soient $L > 0$, $\delta > 0$, $A > 0$ et $0 < \gamma < \pi$. Alors il existe une constante strictement positive N telle que*

$$|f(x)| \leq N \text{ si } x \geq \frac{A^2}{\pi - \gamma},$$

pour toute suite de nombres complexes $(\lambda_n)_{n>L}$ vérifiant (2.11) *et* (2.12) *et pour toute fonction f holomorphe dans un ouvert contenant $\{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq 0\}$ vérifiant*

$$|f(z)| \leq Ae^{\gamma|z|}, \ \Re z \geq 0, \tag{2.40}$$

$$|f(\lambda_n)| \leq 1, \ n > L. \tag{2.41}$$

Démonstration. Si $A \leq 1$, le résultat est immédiat par application du théorème 2.2.5. Supposons donc que $A > 1$. Soient $\beta := \frac{2\ln A}{\pi-\gamma}$ et $\tau := \beta A$. Montrons que la fonction g définie dans $\{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq 0\}$ par

$$g(z) := \frac{z}{z+\tau} f(z)$$

vérifie les hypothèses du théorème 2.2.5. Premièrement,

$$|g(z)| \leq \beta \frac{1}{\tau} |f(z)| \leq A^{-1} A e^{\gamma|z|} = e^{\gamma|z|} \text{ si } |z| \leq \beta, \ \Re z \geq 0.$$

vu l'hypothèse (2.40). Deuxièmement,

$$|g(z)| \leq |f(z)| \leq Ae^{\gamma|z|} \leq e^{\kappa|z|}, \text{ si } |z| \geq \beta, \ \Re z \geq 0,$$

où $\kappa := \frac{\pi+\gamma}{2} < \pi$. Nous avons utilisé ici le fait que $|z| \geq \beta$ implique que $A \leq e^{\frac{\pi-\gamma}{2}|z|}$ vu la définition de β. Comme $\gamma < \kappa$, on a bien les hypothèses du théorème 2.2.5 à condition de remplacer γ par κ. Il s'ensuit que

$$|g(z)| \leq Me^{\gamma|y|}, \ \Re z \geq 0,$$

où la constante M ne dépend pas de g donc pas de f, et il vient

$$|g(x)| \leq M, \ x \geq 0.$$

Comme $f(x) = \frac{x+\tau}{x} g(x)$ pour $x \neq 0$, on a

$$|f(x)| \leq \frac{x+\tau}{x} M \leq 2M \text{ si } x \geq \tau = \beta A = \frac{2A\ln A}{\pi - \gamma} > 0$$

Montrons qu'on a $2\ln A < A$. On aura alors la conclusion en notant $N = 2M$. Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}_0^+$ par

$$h(x) := 2\ln x - x.$$

La dérivée de celle-ci est alors la fonction $Dh(x) = \frac{2}{x} - 1$. Celle-ci s'annule uniquement en $x = 2$, prend des valeurs positives pour des valeurs de x inférieures à 2 et prend des valeurs négatives pour des valeurs positives de x supérieures à 2. Ceci montre que la fonction h admet un maximum en $x = 2$. Comme $h(2) = -0,61\ldots$, il s'ensuit que h(x)<0 pour tout $x \in \mathbb{R}_0^+$, c'est-à-dire $2\ln x < x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0^+$, ce qu'il nous fallait. $\square$

2.2.3 Premier théorème de Duffin et Schaeffer

Dans ce paragraphe, nous démontrons le premier théorème de Duffin et Schaeffer, comme annoncé plus haut. Remarquons que l'hypothèse $\gamma < \pi$ dont nous avions besoin plus haut avec une suite de densité uniforme 1 devient $\gamma < \pi d$ lorsqu'on travaille avec une suite de densité uniforme $d > 0$.

Théorème 2.2.22 (Duffin-Schaeffer 1). *Soit $\gamma > 0$ et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite séparée de densité uniforme d avec $d > \frac{\gamma}{\pi}$. Alors il existe une constante strictement positive N telle que*

$$|f(z)| \leq Ne^{\gamma|y|} \sup_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|, \ z \in \mathbb{C},$$

pour toute fonction f entière de type exponentiel γ.

Démonstration. Séparons la rédaction de la démonstration en les deux cas suivants.

- Cas $d = 1$.
  Soit une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et une fonction f vérifiant les conditions du théorème. Si l'ensemble $\{f(\lambda_n) : n \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas borné, alors le résultat est immédiat. Sinon, on peut supposer avoir $|f(\lambda_n)| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. En effet, si $R := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)| = 0$, alors c'est immédiat. Sinon, il suffit de considérer la fonction $\frac{1}{R}f$. La thèse devient alors

  $$|f(z)| \leq Ne^{\gamma|y|},$$

  avec N une constante indépendante de f.
  Par définition d'une suite de densité uniforme 1, il existe $L > 0$ et $\delta > 0$ tels que

  $$|\lambda_n - n| \leq L, \forall n \in \mathbb{Z} \tag{2.42}$$
  $$|\lambda_n - \lambda_m| \geq \delta, \ \forall n, m \in \mathbb{Z}, \ n \neq m. \tag{2.43}$$

  En particulier, la suite $(\lambda_n)_{n>L}$ vérifie les conditions (2.11) et (2.12).
  Définissons la fonction $\tilde{f}$ sur $\mathbb{C}$ par

  $$\tilde{f}(z) := f(-z), \ z \in \mathbb{C}.$$

  Montrons que les fonctions f et $\tilde{f}$ satisfont aux hypothèses du corollaire 2.2.21 avec respectivement les suites $(\lambda_n)_{n>L}$ et $(\mu_n)_{n>L}$, avec $\alpha_n := -\lambda_{-n}$, pour tout $n > L$. Par hypothèse, f est de type exponentiel γ donc par définition, il existe une constante strictement positive A telle que

  $$|f(z)| \leq Ae^{\gamma|z|}, \ z \in \mathbb{C},$$

  et on a aussitôt

  $$|\tilde{f}(z)| = |f(-z)| \leq Ae^{\gamma|-z|} = Ae^{\gamma|z|}, \ z \in \mathbb{C}.$$

D'où l'hypothèse (2.40) est vérifiée. L' hypothèse (2.41) est vérifiée également vu ce qui précède, à condition que la suite $(\alpha_n)_{n>L}$ vérifie (2.11) et (2.12). C'est le cas puisque

$$|\alpha_n - n| = |-\lambda_{-n} - n| = |\lambda_{-n} + n| \leq L,\ n > L,$$
$$|\alpha_n - \alpha_m| = |-\lambda_{-n} + \lambda_{-m}| \geq \delta,\ n, m > L,\ n \neq m,$$

vu (2.42) et (2.43). Dès lors, on déduit du corollaire 2.2.21 qu'il existe des constantes strictement positives N' et N'' telles que

$$|f(x)| \leq N' \text{ et } |\tilde{f}(x)| \leq N'' \text{ si } x \geq \frac{A^2}{\pi - \gamma}.$$

Il s'ensuit que

$$|f(x)| \leq \sup\{N', N''\},\ |x| \geq \frac{A^2}{\pi - \gamma}.$$

Comme f est une fonction entière, sa restriction à $\mathbb{R}$ est une fonction continue et on en déduit finalement qu'il existe une constante C telle que

$$|f(x)| \leq C,\ x \in \mathbb{R}.$$

La seconde partie du lemme 2.2.6 montre alors que

$$|f(z)| \leq Ce^{\gamma|y|},\ z \in \mathbb{C}.$$

Dès lors, tout revient à montrer que la constante C peut être choisie indépendamment de la fonction f. Si $m \in \mathbb{N}_0$, la fonction $z \mapsto g_m(z) := f(z - m)$ satisfait à l'inégalité

$$|g_m(z)| = |f(z - m)| \leq Ce^{\gamma|y|} \leq Ce^{\gamma|z|},\ z \in \mathbb{C}.$$

Comme elle vérifie aussi

$$|g_m(\mu_n)| = |f(\lambda_n)| \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

en les points de la suite $\mu_n := \lambda_{n-m} + m$, $n \in \mathbb{Z}$, et comme

$$|\mu_n - n| = |\lambda_{n-m} - (n - m)| \leq L,\ n \in \mathbb{Z},$$
$$|\mu_n - \mu_n'| = |\lambda_{n-m} - \lambda_{n'-m}| \geq \delta,\ n \neq n',$$

le corollaire 2.2.21 montre que

$$|g_m(x)| \leq N,\ x \geq \frac{C^2}{\pi - \gamma},$$

où la constante N est indépendante de g_m, c'est à dire de f et de m. On en déduit que

$$|f(x)| = |g_m(x + m)| \leq N,\ x \geq -m + \frac{C^2}{\pi - \gamma}.$$

Comme m a été choisi arbitrairement, il vient

$$|f(x)| \leq N, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

La conclusion découle alors d'une seconde application de la deuxième partie du lemme 2.2.6 à la fonction f.

- Cas $d \neq 1$.
Soit une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et une fonction f vérifiant les conditions du théorème. Alors la suite $(d\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est de densité uniforme 1. Considérons la fonction F définie dans $\mathbb{C}$ par

$$F(z) := f\left(\frac{z}{d}\right).$$

Comme f est une fonction entière de type exponentiel γ, il existe une constante A strictement positive telle que

$$|f(z)| \leq Ae^{\gamma|z|}, \ z \in \mathbb{Z}.$$

Il s'ensuit que la fonction F est entière et vérifie

$$|F(z)| = |f\left(\frac{z}{d}\right)| \leq Ae^{\gamma\frac{|z|}{d}} = Ae^{\gamma'|z|}, \ z \in \mathbb{Z}.$$

où $\gamma' = \frac{\gamma}{d} < \pi$. De plus, on a

$$|F(d\lambda_n)| = |f(\lambda_n)|.$$

Comme dans le premier cas, quitte à travailler avec la fonction $\frac{1}{R}F$, avec $R := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|$, on peut supposer avoir $|F(d\lambda_n)| \leq 1$. Vu le cas $d = 1$, il existe une constante strictement positive N indépendante de F donc de f telle que

$$|F(z)| \leq Ne^{\gamma'|y|}, \ z \in \mathbb{C},$$

donc telle que

$$|f\left(\frac{z}{d}\right)| \leq Ne^{\gamma'|y|}, \ z \in \mathbb{C}.$$

En écrivant $z' = \frac{z}{d}$, $\Im z' = y' = \frac{y}{d}$, on obtient

$$|f(z')| \leq Ne^{\gamma' d|y'|} = Ne^{\gamma|y'|}, \ z' \in \mathbb{C}.$$

ce qui permet de conclure.

□

2.3 Lien avec les frames d'exponentielles

Comme la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{int}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée totale dans $L^2(]-\pi,\pi[)$, la suite de fonctions $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une frame sur $L^2(]-\pi,\pi[)$ de bornes $A=B=2\pi$. En effet, vu la formule de Parseval pour les suites orthonormées totales, on a

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{L^2(]-\pi,\pi[)} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, e^{int}\rangle_{L^2(]-\pi,\pi[)}\right|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}}dt\right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}dt\right|^2,\ \forall f\in L^2(]-\pi,\pi[).\end{aligned} \tag{2.44}$$

Plus généralement, étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes, une frame sur $L^2(I)$ de la forme $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est appelée une frame d'exponentielles ou une frame de Fourier. On dit que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ génère la frame $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ sur $L^2(I)$. Remarquons que comme les exponentielles ne sont pas de carré intégrable, l'intervalle I est nécessairement borné.

Dans leur article "A class of nonharmonic Fourier series" ([7]) de 1952, Duffin et Schaeffer proposent d'abord la définition d'une frame d'exponentielles et ensuite seulement la définition d'une frame dans un espace de Hilbert quelconque telle que nous l'avons donnée plus haut. Duffin et Schaeffer font une légère distinction entre ces définitions, sans doute pour faciliter les notations. Voici la définition qu'ils donnent des frames d'exponentielles :

Définition 2.3.1. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes et soit $\gamma>0$. La famille de fonctions $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une *frame sur* $L^2(]-\gamma,\gamma[)$ s'il existe des constantes strictement positives A et B telles que

$$A\int_{-\gamma}^{\gamma}|g(t)|^2dt \le \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-\gamma}^{\gamma} g(t)e^{i\lambda_n t}dt\right|^2 \le B\int_{-\gamma}^{\gamma}|g(t)|^2dt,\ \forall g\in L^2(]-\gamma,\gamma[).$$

Les constantes A et B sont les *bornes de la frame.*

Dans cette troisième partie, nous utiliserons exceptionnellement cette définition. Néanmoins, nous ferons ponctuellement remarquer les nuances à apporter à chacun des résultats établis pous les raccorder à la définition générale d'une frame dans un espace de Hilbert.

2.3.1 Equivalence de deux versions du deuxième théorème de Duffin et Schaeffer

Le but de cette partie est de démontrer le deuxième théorème de Duffin-Schaeffer. Dans ce paragraphe sont données deux versions de ce théorème dont nous allons immédiatement prouver l'équivalence. La première d'entre elles est relative aux frames d'exponentielles, la seconde aux fonctions entières de type exponentiel dont la restriction à $\mathbb{R}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$, parfois plus simplement appelées fonctions de Paley-Wiener. Ceci montre donc comme la théorie des frames d'exponentielles et celle des fonctions entières de type exponentiel dont la restriction à $\mathbb{R}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$ sont liées.

Théorème 2.3.2 (Duffin-Schaeffer 2). *Soit $d > 0$. Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite séparée de densité uniforme d, alors la suite de fonctions $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une frame sur $L^2(]-\gamma,\gamma[)$, où $0 < \gamma < \pi d$.*

Théorème 2.3.3 (Duffin-Schaeffer 2'). *Soit $d > 0$ et soit $0 < \gamma < \pi d$. Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite séparée de densité uniforme d, alors il existe des constantes strictement positives A et B telles que*

$$A\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2 \leq B\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx,$$

pour toute fonction f entière de type exponentiel γ dont la restriction à $\mathbb{R}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$.

Remarque 2.3.4. Les théorèmes 2.3.2 et 2.3.3 sont équivalents et si les constantes A et B conviennent pour l'un, elles conviennent aussi pour l'autre. En effet, c'est direct vu le théorème de Paley-Wiener 2.1.4 et la définition d'une frame.

Plus généralement, nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.3.5. *Soient $\gamma > 0$, $A > 0$, $B > 0$ et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombre complexes. Alors la famille de fonctions $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une frame sur $L^2(]-\gamma,\gamma[)$ de bornes A et B si et seulement si*

$$A\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2 \leq B\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx, \tag{2.45}$$

pour toute fonction f entière de type exponentiel γ dont la restriction à $\mathbb{R}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration. Supposons que $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une frame sur $L^2(]-\gamma,\gamma[)$ de bornes A et B. Alors, par définition, on a

$$A\int_{-\gamma}^{\gamma} |g(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\int_{-\gamma}^{\gamma} g(t)e^{i\lambda_n t}dt\right|^2 \leq B\int_{-\gamma}^{\gamma} |g(t)|^2 dt,\ \forall g \in L^2(]-\gamma,\gamma[).$$

Soit f une fonction entière de type exponentiel γ dont la restriction à $\mathbb{R}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$. Alors, vu le le théorème de Paley-Wiener 2.1.4, il existe une fonction $g_0 \in L^2(]-\gamma,\gamma[)$ telle que

$$f(z) = \int_{-\gamma}^{\gamma} g_0(t)e^{izt}dt,\ z \in \mathbb{C}. \tag{2.46}$$

Dès lors, vu ce qui précède, on a

$$A\int_{-\gamma}^{\gamma}|g_0(t)|^2dt \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-\gamma}^{\gamma}g_0(t)e^{i\lambda_n t}dt\right|^2 \leq B\int_{-\gamma}^{\gamma}|g_0(t)|^2dt,$$

donc

$$A\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}|f(\lambda_n)|^2 \leq B\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx,$$

vu 2.47 et vu le théorème de Plancherel.

Montrons la réciproque. Soit $g \in L^2(]-\gamma,\gamma[)$. Vu le théorème de Paley-Wiener 2.1.4, la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z) := \int_{-\gamma}^{\gamma}g(t)e^{izt}dt \tag{2.47}$$

est une fonction entière de type exponentiel γ dont la restriction à l'axe réel appartient à $L^2(\mathbb{R})$. Par conséquent, vu l'hypothèse, on a

$$A\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}|f(\lambda_n)|^2 \leq B\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx,$$

donc

$$2\pi A\int_{-\gamma}^{\gamma}|g(t)|^2dt \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-\gamma}^{\gamma}g(t)e^{i\lambda_n t}dt\right|^2 \leq 2\pi B\int_{-\gamma}^{\gamma}|g(t)|^2dt,$$

vu (2.47) et vu le théorème de Plancherel, ce qui permet de conclure. □

Remarque 2.3.6. Dans cette proposition, comme signalé plus haut, la définition des frames d'exponentielles utilisée est celle de Duffin et Schaeffer. Cela permet de faire correspondre les constantes A et B du théorème 2.3.2 avec celles du théorème 2.3.3, ce qui facilite grandement les notations des démonstrations qui suivront dans ce paragraphe. Remarquons ici que si nous avions choisi la définition générale des frames dans un espace de Hilbert, les constantes A et B de ces deux théorèmes se seraient correspondues seulement à un facteur 2π près.

Remarque 2.3.7. Comme nous ne travaillons qu'avec des séries absolument convergentes, dans le théorème 2.3.2, il suffit en fait de supposer qu'une permutation de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit de densité uniforme. Ceci écarte le problème soulevé dans la remarque 2.2.3, pour ce qui nous concerne tout au moins.

Pour faciliter la démonstration du deuxième théorème de Duffin et Schaeffer, nous avons besoin de plusieurs résultats auxiliaires.

2.3.2 Résultats auxiliaires

Lemme 2.3.8. *Soit $\gamma > 0$ et soit $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ une frame sur $L^2(]-\gamma,\gamma[)$. Si M est une constante positive et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite telle que $|\mu_n - \lambda_n| \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors il existe une constante strictement positive C telle que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\mu_n)|^2 \leq C \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2,$$

pour toute fonction f entière de type exponentiel γ dont la restriction à $\mathbb{R}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration. Désignons par A et B les bornes de la frame $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$. La proposition 2.3.5 montre alors que

$$A\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2 \leq B\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx, \tag{2.48}$$

pour toute fonction f entière de type exponentiel γ dont la restriction à $\mathbb{R}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$.
Montrons que si f est une fonction entière de type exponentiel γ dont la restriction à $\mathbb{R}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$ et si ρ est un nombre strictement positif donné, alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\mu_n) - f(\lambda_n)|^2 \leq T \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2, \tag{2.49}$$

où $T := \frac{B}{A}(e^{\frac{\gamma^2}{\rho^2}} - 1)(e^{M^2\rho^2} - 1)$.
Supposons que f soit une fonction satisfaisant ces conditions. Le théorème de Taylor montre alors que

$$f(\mu_n) - f(\lambda_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{D^k f(\lambda_n)}{k!}(\mu_n - \lambda_n)^k, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

En multipliant haut et bas par ρ^k dans le second membre, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}
|f(\mu_n) - f(\lambda_n)|^2 &\leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|D^k f(\lambda_n)|^2}{k!\rho^{2k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\mu_n - \lambda_n|^{2k}\rho^{2k}}{k!}\right) \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|D^k f(\lambda_n)|^2}{k!\rho^{2k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(M\rho)^{2k}}{k!}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|D^k f(\lambda_n)|^2}{k!\rho^{2k}}\right)(e^{M^2\rho^2} - 1), \ \forall n \in \mathbb{Z},
\end{aligned} \tag{2.50}$$

vu que $|\mu_n - \lambda_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par hypothèse. Ensuite, vu la proposition 2.1.7, la fonction $D^k f$ est une fonction entière de type exponentiel γ et sa restriction à l'axe réel appartient à $L^2(\mathbb{R})$. Ainsi, vu ce qui précède, la fonction $D^k f$ satisfait l'inégalité (2.48) quel que soit $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$A \int_{\mathbb{R}} \left|D^k f(x)\right|^2 dx \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|D^k f(\lambda_n)\right|^2 \leq B \int_{\mathbb{R}} \left|D^k f(x)\right|^2 dx, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dès lors, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|D^k f(\lambda_n)\right|^2 \leq B \int_{\mathbb{R}} \left|D^k f(x)\right|^2 dx \leq B\gamma^{2k} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

en utilisant l'inégalité (2.6) de la proposition 2.1.7. Comme la fonction f satisfait (2.48) également, il est clair que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|D^k f(\lambda_n)\right|^2 \leq \frac{B\gamma^{2k}}{A} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2, \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.51}$$

En rassemblant les inégalités (2.50) et (2.51), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\mu_n) - f(\lambda_n)|^2 &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left|D^k f(\lambda_n)\right|^2}{k!\rho^{2k}} \right) (e^{M^2\rho^2} - 1) \\
&\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B\gamma^{2k}}{Ak!\rho^{2k}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2 (e^{M^2\rho^2} - 1) \\
&= \frac{B}{A}(e^{\frac{\gamma^2}{\rho^2}} - 1)(e^{M^2\rho^2} - 1) \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2,
\end{aligned}$$

ce qu'il nous fallait.
Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\mu_n)|^2} &\leq \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} (|f(\mu_n) - f(\lambda_n)| + |f(\lambda_n)|)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\mu_n) - f(\lambda_n)|^2} + \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2} \\
&\leq \sqrt{T \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2} + \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2} = \left(\sqrt{T} + 1\right) \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2},
\end{aligned}$$

pour tout $\rho > 0$ et pour toute fonction f entière de type exponentiel γ dont la restriction à $\mathbb{R}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$, où on a utilisé successivement l'inégalité de Minkowski et l'inégalité (2.49). On a donc obtenu que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\mu_n)|^2 \leq C \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2,$$

avec $C := \left(\sqrt{T}+1\right)^2$, pour tout $\rho > 0$ et pour toute fonction entière de type exponentiel γ dont la restriction à $\mathbb{R}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$. D'où la conclusion. $\square$

Le lemme 2.3.8 montre l'existence de la constante B du théorème de Duffin et Schaeffer. Nous détaillerons ceci plus loin.

Le résultat suivant montre que la classe des frames d'exponentielles est stable pour des "petits" déplacements des λ_n.

Lemme 2.3.9. *Soit $\gamma > 0$ et soit $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ une frame sur $L^2(]-\gamma,\gamma[)$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $(e^{i\mu_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une frame sur $L^2(]-\gamma,\gamma[)$ lorsque $|\mu_n - \lambda_n| \leq \eta$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Vu la démonstration du lemme 2.3.8, on sait que, pour tout $M > 0$ tel que $|\mu_n - \lambda_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $\rho > 0$ et pour toute fonction f entière de type exponentiel γ dont la restricion à $\mathbb{R}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\mu_n) - f(\lambda_n)|^2 \leq T \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2,$$

avec

$$T = \frac{B}{A}(e^{\frac{\gamma^2}{\rho^2}} - 1)(e^{M^2\rho^2} - 1),$$

où A et B sont les bornes de la frame $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$. Dès lors, dans les mêmes conditions, grâce aux inégalités de Minkowski et de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2} \leq \sqrt{T\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2} + \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\mu_n)|^2}. \tag{2.52}$$

Soit maintenant $\eta = M = \frac{1}{\rho}$. Dans ce cas, on a

$$T = \frac{B}{A}(e^{\frac{\gamma^2}{\rho^2}} - 1)(e^{M^2\rho^2} - 1) = \frac{B}{A}(e^{\frac{\gamma^2}{\rho^2}} - 1)(e - 1),$$

donc $T \to 0$ quand $\rho \to +\infty$. Choisissons ρ assez grand pour avoir $T < \frac{1}{4}$. Dans ce cas, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2 \leq 4 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\mu_n)|^2.$$

vu l'inégalité (2.52). Dès lors, la proposition 2.3.5 montre que

$$\frac{A}{4}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\mu_n)|^2. \tag{2.53}$$

Ensuite, le lemme 2.3.8 nous donne une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\mu_n)|^2 \leq C \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\lambda_n)|^2,$$

et donc, vu l'inégalité (2.45) de la proposition 2.3.5, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\mu_n)|^2 \leq CB \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx. \tag{2.54}$$

En rassemblant les inégalités (2.53) et (2.54), on a obtenu que

$$\frac{A}{4}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\mu_n)|^2 \leq CB \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx,$$

pour toute fonction entière de type exponentiel γ dont la restriction à $\mathbb{R}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$, lorsque $|\mu_n - \lambda_n| \leq \eta$, pour η suffisamment petit. La conclusion découle alors de la proposition 2.3.5. □

La preuve de l'existence de la constante A dans les théorèmes 2.3.2 et 2.3.3 dépend de plusieurs résultats. Le premier n'est autre que le premier théorème de Duffin et Schaeffer démontré dans la section précédente.

Le lemme suivant est donné sous une forme plus forte que nécessaire pour la suite de ce texte car il présente un intérêt qui lui est propre. Pour démontrer ce résultat, nous aurons besoin du premier théorème de Duffin et Schaeffer établi précédemment. Remarquons que celui-ci impose l'hypothèse $\gamma \in]0, \pi d[$.

Lemme 2.3.10. *Soit* $A_2 = \overline{\rangle\{1, e^{i\theta}, e^{2i\theta}, \ldots\}\langle}^{L^2(]-\pi,\pi[)}$ *et soit* $\gamma > 0$*. Si* f *est une fonction entière de type exponentiel* γ *telle que* $D^k f(0) \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ *et si la suite* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est de densité uniforme* d*, avec* $d > \frac{\gamma}{\pi}$*, alors l'ensemble de fonctions* $\{f(\lambda_n e^{i\theta}) : n \in \mathbb{Z}\}$ *est d'enveloppe linéaire dense dans* A_2*.*

Démonstration. Soit $g \in A_2$ tel que

$$\langle f(\lambda_n e^{i\theta}), g\rangle_{L^2(]-\pi,\pi[)} = 0 \;\forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2.55}$$

La démonstration consiste à montrer que $g = 0$ presque partout dans $]-\pi, \pi[$.
Comme la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikt}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée totale dans $L^2(]-\pi,\pi[)$, la fonction g, appartenant à $L^2(]-\pi,\pi[)$, se développe en série trigonométrique de Fourier dans cet espace :

$$g(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta} \text{ avec } c_k = \frac{1}{2\pi}\langle g, e^{ik\theta}\rangle_{L^2(]-\pi,\pi[)} \;\forall k \in \mathbb{Z}.$$

Par ailleurs, par définition de l'ensemble A_2, il existe des coefficients d_k, $k \in \mathbb{Z}$, tels que

$$\sum_{\nu=0}^{N} d_k e^{ik\theta} \xrightarrow[L^2(]-\pi,\pi[)]{} g(\theta) \text{ si } N \to +\infty,$$

avec $\sum_{\nu=0}^{+\infty} |d_k|^2 < \infty$. On en tire que $c_k = 0$ pour tout $k < 0$. Il reste donc à montrer que $c_k = 0$ pour tout $k \geq 0$. Soit F une fonction définie dans le plan complexe par

$$F(z) := \int_{-\pi}^{\pi} f(ze^{i\theta})\bar{g}(\theta)d\theta. \tag{2.56}$$

Comme f est une fonction entière de type exponentiel γ, il en est de même pour F. De fait,

$$|F(z)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f\left(ze^{i\theta}\right)|\ |\bar{g}(\theta)|\ dx \leq A \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{g}(\theta)|\ d\theta\ e^{\gamma|z|}.$$

De plus, on a

$$F(\lambda_n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda_n e^{i\theta})\bar{g}(\theta)d\theta = \langle f(\lambda_n e^{i\theta}), g\rangle_{L^2(]-\pi,\pi[)} = 0\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

vu (2.55) et il s'ensuit que la fonction F est identiquement nulle par le premier théorème de Duffin et Schaeffer 2.2.22. Par conséquent, en dérivant les deux membres de l'égalité (2.56), on obtient

$$D^k F(0) = \int_{-\pi}^{\pi} D^k f(0) e^{ik\theta}\bar{g}(\theta)d\theta = 0,\ \forall k \in \mathbb{N},$$

vu le théorème de dérivation des intégrales paramétriques. Et comme $D^k f(0) \neq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$ par hypothèse, on obtient

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\langle g, e^{ik\theta}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}\bar{g}(\theta)d\theta = 0,\ \forall k \geq 0,$$

d'où la conclusion. □

Voici le dernier résultat dont nous aurons besoin pour la preuve de l'existence de la constante A du deuxième théorème de Duffin et Schaeffer. C'est à lui seul que nous ferons appel dans la démonstration de ce théorème.

Lemme 2.3.11. *Soit R tel que $0 < R < \pi$, soit p une fonction holomorphe dans un ouvert contenant le disque fermé $\overline{D(0,R)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite séparée de densité uniforme 1. Pour tout nombre strictement positif h, il existe un entier N et des nombres $a_{-N}, ..., a_0, ..., a_N$ tels que*

$$p(z) - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{i\lambda_n z} = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k z^k,\ si\ |z| \leq R \tag{2.57}$$

$$|b_k| \leq \frac{h}{R^k},\ |a_n| \leq N. \tag{2.58}$$

De plus, étant donnés h, R, p, L, δ, le même N convient pour toutes les suites $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant à

$$|\lambda_n - n| \leq L,\ \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{2.59}$$

$$|\lambda_n - \lambda_m| \geq \delta,\ \forall n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq m. \tag{2.60}$$

Démonstration. Montrons la première partie. Fixons $h > 0$. La fonction f définie dans le plan complexe par $f(z) := e^{iRz}$ est entière de type exponentiel R. En effet, on a

$$|f(z)| = |e^{iRz}| = e^{-Ry} \leq e^{R|y|} \leq e^{R|z|},\ z \in \mathbb{C}.$$

Comme on a aussi $D^k f(0) = (iR)^k \neq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$, la fonction f vérifie les hypothèses du lemme 2.3.10 en remplaçant γ par R et donc, par application de celui-ci, l'ensemble de fonctions

$$\{f(\lambda_n e^{i\theta}) : n \in \mathbb{Z}\} = \{e^{iR\lambda_n e^{i\theta}} : n \in \mathbb{Z}\}$$

est d'enveloppe linéaire dense dans $A_2 = \overline{\rangle\{1, e^{i\theta}, e^{2i\theta}, \ldots\}\langle}^{L^2(]-\pi,\pi[)}$.
Par ailleurs, la fonction $\theta \mapsto p(Re^{i\theta})$ définie dans $]-\pi, \pi[$ appartient à A_2. En effet, le développement de Taylor appliqué à la fonction p en 0 donne

$$p(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{m!}(D^m p)(0),\ z \in \overline{D(0,R)}$$

et comme $Re^{i\theta} \in \overline{D(0,R)}$ si $\theta \in]-\pi, \pi[$, on a

$$p(Re^{i\theta}) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{R^m e^{im\theta}}{m!}(D^m p)(0),\ \theta \in]-\pi, \pi[.$$

Par conséquent, vu ce qui précède, il existe un entier M et des nombres $a_{-M}, \ldots, a_0, \ldots, a_M$ tels que si

$$\tau(Re^{i\theta}) = p(Re^{i\theta}) - \sum_{n=-M}^{M} a_n e^{i\lambda_n Re^{i\theta}},$$

alors

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |\tau(Re^{i\theta})|^2 d\theta} \leq h. \tag{2.61}$$

Ensuite, comme la fonction $z \to \tau(z) = p(z) - \sum_{n=-M}^{M} a_n e^{i\lambda_n z}$ est holomorphe dans un ouvert contenant le disque $\overline{D(0,R)}$, le théorème de Taylor pour les fonctions holomorphes affirme que la série de Taylor de τ en l'origine

$$\tau(z) = p(z) - \sum_{n=-M}^{M} a_n e^{i\lambda_n z} = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k z^k$$

converge dans le disque fermé $\overline{D(0,R)}$. Ainsi, en utilisant la formule intégrale de Cauchy, on a

$$\begin{aligned} |b_k| &= \left|\frac{(D^k\tau)(0)}{k!}\right| = \left|\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=R} \frac{\tau(z)}{z^{k+1}} dz\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tau(Re^{i\theta})}{(Re^{i\theta})^{k+1}} iRe^{i\theta} d\theta\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{R^k}\int_{-\pi}^{\pi} |\tau(Re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{R^k}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |\tau(Re^{i\theta})|^2 d\theta} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{1}{R^k}\ h \leq \frac{h}{R^k}, \end{aligned}$$

vu l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (2.61). En posant $a_n = 0$ pour $M < |n| \leq N$ et en choisissant N assez grand, on a la conclusion de la première partie.

La preuve de la seconde partie se fait par l'absurde. Soient h, R, p, L, δ fixés et supposons qu'il n'existe pas de N qui convienne pour toute suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant à (2.59) et (2.60). Alors $\forall j \in \mathbb{N}_0$, il existe une suite $(\lambda_n^{(j)})_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant à (2.59) et (2.60) telle que le plus petit entier $N = N(j)$ pour lequel on a (2.57) et (2.58) pour certains $a_n^{(j)}$ et $b_k^{(j)}$ satisfait

$$N(j) > j. \tag{2.62}$$

Comme on a

$$|\lambda_n^{(j)} - n| \leq L, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall j \in \mathbb{N}_0,$$

la suite $(\lambda_n^{(j)})_{j\in\mathbb{N}_0}$ est une suite bornée. On peut donc en extraire une sous-suite convergente. Pour faciliter les notations, on note encore cette sous-suite $(\lambda_n^{(j)})_{j\in\mathbb{N}_0}$. Désignons par $\lambda_n^{(0)}$ sa limite. La suite $(\lambda_n^{(0)})_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie bien sûr (2.59) et (2.60), ce qui implique qu'elle est de densité uniforme 1. Dès lors, vu la preuve de la première partie, il existe N_0 et des nombres $a_{-N_0}^{(0)}, \ldots, a_0^{(0)}, \ldots, a_{N_0}^{(0)}$ tels que

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left| p(Re^{i\theta}) - \sum_{n=-N_0}^{N_0} a_n^{(0)} e^{i\lambda_n^{(0)} Re^{i\theta}} \right|^2 d\theta} \leq h,$$

avec

$$|a_n^{(0)}| \leq N_0, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm N_0.$$

La somme finie

$$\sum_{n=-N_0}^{N_0} a_n^{(0)} e^{i\lambda_n Re^{i\theta}}$$

est une fonction continue en les $2N_0 + 1$ variables λ_n donc il existe $J \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left| p(Re^{i\theta}) - \sum_{n=-N_0}^{N_0} a_n^{(0)} e^{i\lambda_n^{(j)} Re^{i\theta}} \right|^2 d\theta} \leq h,$$

pour tout $j \geq J$. Mais alors, vu la preuve de la première partie, on a $N_0(j) = N_0 < j$ lorsque $j \geq J$, ce qui contredit l'inégalité (2.62). D'où la thèse. □

2.3.3 Deuxième théorème de Duffin et Schaeffer

Nous allons à présent passer à la démonstration du deuxième théorème de Duffin et Schaeffer annoncée au début de ce paragraphe. Nous rappelons ici l'énoncé de ce théorème afin de faciliter la lecture : *Si $d > 0$ et si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une séparée suite de densité uniforme d, alors la suite de fonctions $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une frame sur $L^2(]-\gamma,\gamma[)$, où $0 < \gamma < \pi d$.*

Démonstration du deuxième théorème de Duffin et Schaeffer 2.3.2. Séparons la rédaction de la démonstration en deux parties distinctes : la preuve de l'existence de la constante B et ensuite celle de la constante A.
-Montrons l'existence de la constante B.
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de densité uniforme $d>0$. Soit $0<\gamma<\pi d$.

- Cas $d=1$.
  Comme on sait, vu plus haut, que la suite de fonctions $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une frame sur $L^2(]-\pi,\pi[)$, cet ensemble est aussi une frame sur $L^2(]-\gamma,\gamma[)$. Ensuite, comme on a $|\lambda_n-n|\leq L$ pour un certain L strictement positif par définition d'une suite de densité uniforme 1, le lemme 2.3.8 nous donne une constante $C>0$ telle que
  $$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f(\lambda_n)|^2\leq C\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f(n)|^2,$$
  pour toute fonction f entière de type exponentiel γ dont la restriction à $\mathbb{R}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$. La conclusion découle alors directement de la proposition 2.3.5.
- Cas $d\neq 1$.
  En fait, nous allons montrer un résultat plus fort, c'est-à-dire que si les théorèmes 2.3.2 et 2.3.3 sont vrais pour $d=1$, alors ils le sont aussi pour $d\neq 1$. Il suffit bien sûr de le montrer pour le théorème 2.3.2.
  Comme $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de densité uniforme $d>0$, il est clair que la suite $(d\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est de densité uniforme 1.
  Posons $\gamma'=\frac{\gamma}{d}$. Ainsi, on a $0<\gamma'<\pi$. Par hypothèse, $(e^{id\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une frame sur $L^2(]-\gamma',\gamma'[)$, c'est à dire qu'il existe A et B tels que
  $$A\int_{-\gamma'}^{\gamma'}|g(t)|^2dt\leq\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-\gamma'}^{\gamma'}g(t)e^{id\lambda_n t}dt\right|^2\leq B\int_{-\gamma'}^{\gamma'}|g(t)|^2dt,\ \forall g\in L^2(]-\gamma',\gamma'[).$$
  Soit $h\in L^2(]-\gamma,\gamma[)$. En considérant le changement de variables $t=dx$, on a
  $$\int_{-\gamma}^{\gamma}h(t)e^{i\lambda_n t}dt=\int_{-\gamma'}^{\gamma'}h(dx)e^{id\lambda_n x}d\ dx$$
  et
  $$\int_{-\gamma}^{\gamma}|h(t)|^2dt=\int_{-\gamma'}^{\gamma'}|h(dx)|^2d\ dx.$$
  La fonction g définie dans $]-\gamma',\gamma'[$ par $g(x)=h(dx)$ appartient à $L^2(]-\gamma',\gamma'[)$. Vu ce qui précède, on a alors
  $$A\int_{-\gamma'}^{\gamma'}|g(t)|^2dt\leq\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-\gamma'}^{\gamma'}g(t)e^{id\lambda_n t}dt\right|^2\leq B\int_{-\gamma'}^{\gamma'}|g(t)|^2dt,$$
  c'est-à-dire
  $$A\int_{-\gamma}^{\gamma}|h(t)|^2dt\leq\frac{1}{2\pi d}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-\gamma}^{\gamma}h(t)e^{i\lambda_n t}dt\right|^2\leq B\int_{-\gamma}^{\gamma}|h(t)|^2dt,$$

ce qui conclut la preuve.
-Montrons l'existence de la constante A.
Vu la première partie de la démonstration, il suffit de faire la preuve pour le cas $d = 1$.
Etant donné une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de densité uniforme 1, considérons

$$\lambda_n^{(\nu)} = \lambda_{n+\nu} - \nu,\ n, \nu \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, $\forall \nu \in \mathbb{Z}$, la suite $(\lambda_n^{(\nu)})_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie

$$|\lambda_n^{(\nu)} - n| = |\lambda_{n+\nu} - \nu - n| \leq L,$$
$$|\lambda_n^{(\nu)} - \lambda_m^{(\nu)}| = |\lambda_{n+\nu} - \lambda_{m+\nu}| \geq \delta > 0,\ n \neq m.$$

La suite $(\lambda_n^{(\nu)})_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc aussi de densité uniforme 1, quel que soit $\nu \in \mathbb{Z}$. Définissons les p, R, h provenant du lemme 2.3.11 par

$$p(z) := 1;\ R := \frac{1}{2}(\gamma + \pi);\ h := \frac{1}{2R}(R - \gamma).$$

Ainsi, la deuxième partie du lemme 2.3.11 affirme que pour des $a_n^{(\nu)}$, $b_k^{(\nu)}$ et N convenables, nous avons

$$1 - \sum_{n=-N}^{N} a_n^{(\nu)} e^{i\lambda_n^{(\nu)} x} = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k^{(\nu)} x^k,\ |x| \leq R;\ |b_k^{(\nu)}| \leq \frac{h}{R^k};\ |a_n^{(\nu)}| \leq N,$$

et la même constante N convient pour toutes les suites $(\lambda_n^{(\nu)})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\nu \in \mathbb{Z}$. Si on considère les fonctions ψ_ν, $\nu \in \mathbb{Z}$, définies sur le disque ouvert $D(0, R)$ par

$$\psi_\nu(x) = e^{i\nu x} - e^{i\nu x} \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k^{(\nu)} x^k,\ |x| < R,$$

on a, vu ce qui précède,

$$\psi_\nu(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n^{(\nu)} e^{i\nu x + i\lambda_n^{(\nu)} x} = \sum_{n=-N}^{N} a_n^{(\nu)} e^{i\lambda_{n+\nu} x},\ \forall \nu \in \mathbb{Z}. \tag{2.63}$$

pour $|x| < R$. Par ailleurs, si quel que soit $\nu \in \mathbb{Z}$, on définit

$$\xi^\nu(x) := e^{i\nu x} \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k^{(\nu)} x^k,\ |x| < R,$$

on obtient

$$\psi_\nu(x) = e^{i\nu x} - \xi^\nu(x),\ \forall \nu \in \mathbb{Z}.$$

Pour faciliter la lecture du reste de cette démonstration, on utilisera les notations suivantes, pour $\phi, g \in L^2(]-\gamma, \gamma[)$:

$$(\phi, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{\gamma} \phi(x) g(x) dx \text{ et } \|g\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{\gamma} |g(x)|^2 dx}.$$

Etant donnée une fonction $g \in L^2(]-\gamma,\gamma[)$, on étend la définition de g dans $]-\pi,\pi[$ en la supposant nulle en dehors de $]-\gamma,\gamma[$. Dès lors, la relation de Parseval (2.45) prend la forme

$$\|g\|^2 = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |(e^{i\nu x}, g)|^2. \tag{2.64}$$

Ensuite, comme $R > \gamma$ et $|b_k^{(\nu)}| \leq \frac{h}{R^k}$, pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$, la série

$$\xi^\nu(x) := e^{i\nu x} \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k^{(\nu)} x^k$$

converge uniformément sur $[-\gamma,\gamma]$. Il s'ensuit que ξ^ν est continu sur $[-\gamma,\gamma]$ donc appartient à $L^2(]-\gamma,\gamma[)$. Dès lors, on a

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} \xi^{(\nu)}(x)g(x)dx = \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{i\nu x}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k^{(\nu)} x^k\right) g(x)dx = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k^{(\nu)} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{i\nu x} x^k g(x)dx,\ \forall\nu\in\mathbb{Z},$$

vu la définition de ξ^ν et vu le théorème de la convergence majorée avec

$$\left| e^{i\nu x}\left(\sum_{k=0}^{m} b_k^{(\nu)} x^k\right) g(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{m} b_k^{(\nu)} x^k\right| |g(x)| \leq h \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{|x|}{R}\right)^k |g(x)| \in L^1(]-\gamma,\gamma[)$$

comme fonction intégrable fixe, où on a utilisé l'inégalité $|b_k^{(\nu)}| \leq \frac{h}{R^k}$, pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$. En effet, la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{|x|}{R}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{|x|}{R}},\ |x| < \gamma,$$

est continue sur $[-\gamma,\gamma]$ donc appartient à $L^2(]-\gamma,\gamma[)$. Ainsi,

$$(\xi^\nu, g) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k^{(\nu)} (e^{i\nu x}, x^k g),\ \forall\nu\in\mathbb{Z}.$$

En multipliant et en divisant cette série terme à terme par $(R\gamma)^{\frac{k}{2}}$, on obtient

$$(\xi^{(\nu)}, g) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(b_k^{(\nu)} (R\gamma)^{\frac{k}{2}}\right)\left(\frac{(e^{i\nu x}, x^k g)}{(R\gamma)^{\frac{k}{2}}}\right),\ \forall\nu\in\mathbb{Z},$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
|(\xi^{(\nu)}, g)|^2 &\leq \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \left|b_k^{(\nu)}\right|^2 (R\gamma)^k\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|(e^{i\nu x}, x^k g)|^2}{(R\gamma)^k}\right) \\
&\leq h^2 \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{\gamma}{R}\right)^k\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|(e^{i\nu x}, x^k g)|^2}{(R\gamma)^k}\right) \\
&= \frac{h^2 R}{R-\gamma} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|(e^{i\nu x}, x^k g)|^2}{(R\gamma)^k},\ \forall\nu\in\mathbb{Z},
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité $|b_k^{(\nu)}| \leq \frac{h}{R^k}$. Remarquons que

$$\|x^k g\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\gamma}^{\gamma} |x^k g(x)|^2 dx \leq \gamma^{2k}\frac{1}{2\pi}\int_{-\gamma}^{\gamma} |g(x)|^2 dx = \gamma^{2k}\|g\|^2. \tag{2.65}$$

Dès lors, en utilisant successivement la relation de Parseval (2.64), l'inégalité (2.65) et la définition de h, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |(\xi^{(\nu)}, g)|^2 &\leq \frac{h^2 R}{R-\gamma}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|(e^{i\nu x}, x^k g)|^2}{(R\gamma)^k} = \frac{h^2 R}{R-\gamma}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\|x^k g\|^2}{(R\gamma)^k} \\
&\leq \frac{h^2 R}{R-\gamma}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\gamma^{2k}\|g\|^2}{(R\gamma)^k} = \frac{h^2 R}{R-\gamma}\|g\|^2 \sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{\gamma}{R}\right)^k \\
&= h^2\left(\frac{R}{R-\gamma}\right)^2 \|g\|^2 = \frac{\|g\|^2}{4}.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Comme

$$e^{i\nu x} = \psi_\nu(x) + \xi^{(\nu)}(x),\ \forall \nu \in \mathbb{Z},$$

on a

$$(e^{i\nu x}, g) = (\psi_\nu, g) + (\xi^{(\nu)}, g),\ \forall \nu \in \mathbb{Z},$$

et en utilisant les inégalités de Minkowski et de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\sqrt{\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |(e^{i\nu x}, g)|^2} \leq \sqrt{\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |(\psi_\nu, g)|^2} + \sqrt{\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |(\xi^{(\nu)}, g)|^2},$$

c'est à dire

$$\|g\| \leq \sqrt{\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |(\psi_\nu, g)|^2} + \sqrt{\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |(\xi^{(\nu)}, g)|^2},$$

vu la relation de Parseval (2.64). Vu l'inégalité (2.66), il vient

$$\frac{\|g\|}{2} \leq \sqrt{\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |(\psi_\nu, g)|^2},$$

et finalement

$$\frac{\|g\|^2}{4} \leq \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |(\psi_\nu, g)|^2. \tag{2.67}$$

Ensuite, vu (2.63), on obtient

$$(\psi_\nu, g) = \sum_{n=-N}^{N} a_n^{(\nu)} (e^{i\lambda_{n+\nu} x}, g),\ \forall \nu \in \mathbb{Z}.$$

Les inégalités de Minkowski et de Cauchy-Schwarz et l'estimation des $a_n^{(\nu)}$ montrent alors que

$$\begin{aligned} |(\psi_\nu, g)|^2 &\leq \left(\sum_{n=-N}^{N} |a_n^{(\nu)}| |(e^{i\lambda_{n+\nu} x}, g)| \right)^2 \leq \sum_{n=-N}^{N} N^2 \cdot \sum_{n=-N}^{N} |(e^{i\lambda_{n+\nu} x}, g)|^2 \\ &= (2N+1)N^2 \sum_{n=-N}^{N} |(e^{i\lambda_{n+\nu} x}, g)|^2. \end{aligned}$$

En sommant, on obtient

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |(\psi_\nu, g)|^2 \leq (2N+1)N^2 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \sum_{n=-N}^{N} |(e^{i\lambda_{n+\nu} x}, g)|^2 = (2N+1)^2 N^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |(e^{i\lambda_k x}, g)|^2$$

car dans la double somme, la somme $n + \nu$ parcourt les entiers précisément $2N + 1$ fois. Finalement, vu (2.67), il vient

$$\|g\|^2 \leq 4N^2 (2N+1)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |(e^{i\lambda_k x}, g)|^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{\gamma} |g(x)|^2 dx \leq \frac{4N^2(2N+1)^2}{(2\pi)^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\gamma}^{\gamma} g(x) e^{i\lambda_k x} dx \right|^2,$$

où N est indépendant du choix la fonction $g \in L^2(]-\gamma, \gamma[)$. Ceci achève la démonstration. □

2.3.4 Compléments au sujet du deuxième théorème de Duffin et Schaeffer

Une question se pose naturellement après la démonstration du deuxième théorème de Duffin et Schaeffer : pourquoi est-on limité dans le choix de γ ? En effet, l'hypothèse $\gamma < \pi$ nous est imposée par le premier théorème de Duffin et Schaeffer. Celui-ci étant relatif à la théorie des fonctions holomorphes, ceci peut paraître étonnant au premier abord. Mais nous avons montré l'équivalence entre les théorèmes 2.3.2 et 2.3.3, ce qui explique le lien étroit existant entre les frames d'exponentielles et les fonctions entières de type exponentiel. Dans cette dernière partie du deuxième chapitre, nous allons montrer qu'en fait, de ce point de vue, le deuxième théorème de Duffin-Schaeffer ne peut être amélioré. En effet, on peut trouver des suites $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de densité uniforme d, $d > 0$, qui ne génèrent pas de frame sur $L^2(]-\gamma, \gamma[)$, $\gamma > \pi$. L'exemple suivant est significatif à ce sujet.

Exemple 2.3.12. La suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}} := (n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est séparée de densité uniforme 1 mais ne génère pas de frame sur $L^2(]-\gamma, \gamma[)$, quel que soit $\gamma > \pi$.

On a même la proposition suivante.

Proposition 2.3.13. *Soit $d > 0$. Alors $(e^{\frac{int}{d}})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une frame sur $L^2(]-\gamma,\gamma[)$ si et seulement si $\gamma \in]0,\pi d]$.*

Démonstration. La condition est suffisante vu le deuxième théorème de Duffin et Schaeffer. Montrons la réciproque. Séparons la preuve en les deux cas suivants.

- Cas $d = 1$.
  Soit $\gamma > \pi$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma > \pi + \varepsilon$. Considérons la fonction ϕ_ε définie sur l'intervalle $]-\pi-\varepsilon,\pi+\varepsilon[$ par

$$\phi_\varepsilon(t) := \begin{cases} -1 \text{ si } t < -\pi+\varepsilon \\ 0 \quad \text{si } |t| \leq \pi-\varepsilon \\ 1 \quad \text{si } t > \pi-\varepsilon. \end{cases}$$

  Bien sûr, la fonction ϕ_ε appartient à $L^2(]-\pi-\varepsilon,\pi+\varepsilon[)$ et vérifie

$$\int_{-\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} \phi_\varepsilon(t)dt = 0.$$

  Montrons qu'elle vérifie également

$$\int_{-\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} \phi_\varepsilon(t)e^{izt}dt = \frac{4i}{z}\sin(\pi z)\sin(\varepsilon z),\ z \in \mathbb{C}_0.$$

  En effet,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} \phi_\varepsilon(t)e^{izt}dt &= -\int_{-\pi-\varepsilon}^{-\pi+\varepsilon} e^{izt}dt + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} e^{izt}dt \\
&= \frac{-e^{iz(-\pi+\varepsilon)} + e^{iz(-\pi-\varepsilon)} + e^{iz(\pi+\varepsilon)} - e^{iz(\pi-\varepsilon)}}{iz} \\
&= -\frac{e^{iz(\pi-\varepsilon)} + e^{-iz(\pi-\varepsilon)}}{iz} + \frac{e^{iz(\pi+\varepsilon)} + e^{-iz(\pi+\varepsilon)}}{iz} \\
&= -\frac{2\cos\left(z(\pi-\varepsilon)\right)}{iz} + \frac{2\cos\left(z(\pi+\varepsilon)\right)}{iz} \\
&= \frac{4}{iz}\sin(\pi z)\sin(-\varepsilon z) = \frac{4i}{z}\sin(\pi z)\sin(\varepsilon z),\ z \in \mathbb{C}_0.
\end{aligned}$$

  Dès lors, il vient

$$\int_{-\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} \phi_\varepsilon(t)e^{int}dt = 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

  Comme on a également

$$\int_{-\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} |\phi_\varepsilon(t)|^2 dt = \int_{-\pi-\varepsilon}^{-\pi+\varepsilon} dt + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} dt = 4\varepsilon > 0,$$

  la fonction ϕ_ε ne satisfait pas la condition inférieure des frames.
  On a donc montré que la suite $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une frame sur $L^2(]-\pi-\varepsilon,\pi+\varepsilon[)$.
  Comme $\gamma > \pi + \varepsilon$, on a la conclusion.

- Cas $d \neq 1$.
  Soit $\gamma > \pi d$. Procédons par l'absurde et supposons que $(e^{\frac{int}{d}})_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une frame sur $L^2(]-\gamma,\gamma[)$. Il existe donc une constante strictement positive A telle que

$$A\int_{-\gamma}^{\gamma}|f(t)|^2dt \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-\gamma}^{\gamma}f(t)\ e^{\frac{int}{d}}dt\right|^2,\ \forall f\in L^2(]-\gamma,\gamma[).$$

  En utilisant le changement de variable $t = dx$ et en posant $g(x) := f(dx)$ et $\gamma' := \frac{\gamma}{d}$, on obtient

$$dA\int_{-\gamma'}^{\gamma'}|g(x)|^2dx \leq d^2\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-\gamma'}^{\gamma'}g(x)e^{inx}dx\right|^2,\ \forall g\in L^2(]-\gamma',\gamma'[),$$

  ce qui est impossible vu la première partie.

□

En fait, dans la littérature parcourue, nous n'avons rencontré aucun exemple de frame d'exponentielles sur $L^2(]-\gamma,\gamma[)$ avec $\gamma > \pi d$, générée par une suite séparée de densité uniforme d, $d > 0$. Il est donc légitime de penser que si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite séparée de densité uniforme d, $d > 0$, et si $\gamma > \pi d$, alors la suite de fonctions $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une frame sur $L^2(]-\gamma,\gamma[)$. Mais ceci reste à confirmer ou à infirmer, bien entendu.

Le cas $\gamma = \pi$ est discutable. Tout dépend alors de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. En effet, les deux exemples suivants sont assez parlants. Le premier d'entre eux est un résultat maintenant bien connu.

Exemple 2.3.14. La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}} := (n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est séparée de densité uniforme 1 et génère une frame sur $L^2(]-\pi,\pi[)$.

Le contre-exemple suivant est du à Kadec. Nous n'en ferons pas ici la démonstration. Pour établir ceci, on peut se référer par exemple au livre "An introduction to nonharmonic Fourier series" [17] de R.M. Young.

Exemple 2.3.15 (Kadec). La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$\lambda_n := \begin{cases} n-\frac{1}{4} & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ n+\frac{1}{4} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

est séparée de densité uniforme 1 mais ne génère pas de frame sur $L^2(]-\pi,\pi[)$.

Chapitre 3

Caractérisation d'une classe de frames d'exponentielles

Nous avons déjà abordé la définition des frames d'exponentielles dans le dernier paragraphe du chapitre précédent dans le contexte du deuxième théorème de Duffin et Schaeffer. Rappelons qu'il s'agit d'une frame sur l'espace de Hilbert $L^2(I)$ de la forme $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ où I est un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de nombres complexes.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'aller plus loin dans le cas d'une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels. Nous présentons la condition nécessaire et suffisante obtenue par Jaffard pour qu'une suite d'exponentielles générée par une suite réelle soit une frame.

3.1 Résultats généraux

Vu sa vérification immédiate, nous avons déjà utilisé implicitement la proposition suivante dans le chapitre précédent. Il est bon cependant de l'établir une fois dans ce texte afin de clarifier les esprits à ce sujet. En outre, nous allons souvent y faire référence dans ce chapitre.

Proposition 3.1.1. *Soient une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes et $\gamma > 0$. Si $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une frame sur $L^2(]-\gamma,\gamma[)$, alors $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est aussi une frame sur $L^2(]-\gamma',\gamma'[)$ pour tout $\gamma' \in]0,\gamma]$.*

Démonstration. Soit $\gamma' \in]0,\gamma]$. Pour toute fonction f appartenant à $L^2(]-\gamma',\gamma'[)$, la fonction $g := f\chi_{]-\gamma',\gamma'[}$ appartient à $L^2(]-\gamma,\gamma[)$. Dès lors, en gardant ces notations, comme par hypothèse, il existe des constantes A et B strictement positives telles que

$$A\int_{-\gamma}^{\gamma}|g(t)|^2dt \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-\gamma}^{\gamma}g(t)e^{i\lambda_n t}dt\right|^2 \leq B\int_{-\gamma}^{\gamma}|g(t)|^2dt,$$

on a

$$A\int_{-\gamma'}^{\gamma'}|f(t)|^2dt \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-\gamma'}^{\gamma'}f(t)e^{i\lambda_n t}dt\right|^2 \leq B\int_{-\gamma'}^{\gamma'}|f(t)|^2dt, \;,$$

d'où la conclusion. □

Remarque 3.1.2. Nous allons nous intéresser uniquement à des suites $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels distincts. En effet, la discussion suivante règle le cas général. L'intervalle de définition de la frame correspondante ne change pas si l'on répète un nombre fini de fois le même λ_n. Ceci est immédiat. Par contre, si le nombre de répétitions n'est pas fini, alors l'ensemble de fonctions $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ ne pourra être une frame sur $L^2(I)$ pour aucun intervalle I de $\mathbb{R}$. La proposition suivante démontre cette affirmation.

Proposition 3.1.3. *Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes et soit un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une frame sur $L^2(I)$, alors la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ contient au plus un nombre fini de fois le même élément.*

Démonstration. Procédons par l'asburde et supposons que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ contienne une infinité de fois l'élément λ. Bien sûr, il existe une fonction f appartenant à $L^2(I)$, telle que

$$|\langle f, e^{i\lambda t}\rangle_{L^2(I)}|$$

soit un nombre strictement positif. Ceci implique que la série

$$\sum_{n\in\mathbb{J}} \left|\langle f, e^{i\lambda_n t}\rangle_{L^2(I)}\right|^2 = \sum_{\lambda_n\neq\lambda} \left|\langle f, e^{i\lambda_n t}\rangle_{L^2(I)}\right|^2 + \sum_{\lambda_n=\lambda} \left|\langle f, e^{i\lambda_n t}\rangle_{L^2(I)}\right|^2$$

est non bornée. Or par définition d'une frame, on a également

$$\sum_{n\in\mathbb{J}} \left|\langle g, e^{i\lambda_n t}\rangle_{L^2(I)}\right|^2 \leq B\|g\|^2_{L^2(I)},\ \forall g\in L^2(I),$$

avec $B > 0$. D'où on a une contradiction en prenant $g = f$. □

Introduisons ici une notation.

Notation 3.1.4. Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$. On désigne par $|I|$ la mesure de I.

Les deux résultats suivants seront utiles pour la suite.

Proposition 3.1.5. *Soit une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels. Si $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une frame sur $L^2(I)$ pour un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est aussi une frame sur $L^2(J)$ pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$ vérifiant $|J| \leq |I|$.*

Démonstration. Vu la proposition 3.1.1, il est clair qu'il suffit de faire la démonstration pour un intervalle J de $\mathbb{R}$ tel que $|J| = |I|$. Soit J un tel intervalle. Considérons une fonction $g \in L^2(J)$. Comme I et J sont des intervalles bornés de $\mathbb{R}$ tels que $|J| = |I|$, J s'écrit

$$J = I + a$$

pour un certain réel a. Considérons alors la fonction f définie sur I par

$$f(x) := g(x + a).$$

La fonction f appartient à $L^2(I)$ et donc par hypothèse, on a

$$A \int_I |f(x)|^2 dx \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int_I f(x) e^{-i\lambda_n x} dx \right|^2 \leq B \int_I |f(x)|^2 dx,$$

où A et B sont des bornes de la frame $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$. Il s'ensuit que

$$A \int_I |g(x+a)|^2 dx \leq \sum_{n\in\mathbb{J}} \left| \int_I g(x+a) e^{-i\lambda_n x} dx \right|^2 \leq B \int_I |g(x+a)|^2 dx,$$

et vu le changement de variables $y = x + a$, on a

$$A \int_J |g(y)|^2 dy \leq \sum_{n\in\mathbb{J}} \left| \int_J g(y) e^{-i\lambda_n (y-a)} dy \right|^2 \leq B \int_J |g(y)|^2 dy,$$

c'est-à-dire

$$A \int_J |g(y)|^2 dy \leq \sum_{n\in\mathbb{J}} \left| \int_J g(y) e^{-i\lambda_n y} dy \right|^2 \leq B \int_J |g(y)|^2 dy,$$

vu que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite réelle. La proposition est démontrée. □

Proposition 3.1.6. *Soient $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $a \in \mathbb{R}_0$ et si $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une frame sur $L^2(I)$, alors $\{e^{i\frac{\lambda_n}{a}t} : n \in \mathbb{Z}\}$ est une frame sur $L^2(aI)$.*

Démonstration. Soit $f \in L^2(aI)$. La fonction g définie dans I par

$$g(x) := f(ax)$$

appartient à $L^2(I)$. Dès lors, vu l'hypothèse, on a

$$A \int_I |f(ax)|^2 dx \leq \sum_{n\in\mathbb{J}} \left| \int_I f(ax) e^{-i\lambda_n x} dx \right|^2 \leq B \int_I |f(ax)|^2 dx,$$

où A et B sont des bornes de la frame $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$. Vu le changement de variables $t = ax$, il vient

$$\frac{A}{a} \int_{aI} |f(t)|^2 dt \leq \frac{1}{a^2} \sum_{n\in\mathbb{J}} \left| \int_{aI} f(t) e^{-i\frac{\lambda_n}{a}t} dt \right|^2 \leq \frac{B}{a} \int_{aI} |f(t)|^2 dt,$$

d'où la conclusion. □

Voisi un résultat général relatif aux suites de Bessel d'exponentielles. Il nous servira par la suite.

Proposition 3.1.7. *Soient I et J deux intervalles bornés de $\mathbb{R}$ et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres réels. Alors $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de Bessel sur $L^2(I)$ si et seulement si $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de Bessel sur $L^2(J)$.*

Démonstration. Vu la symétrie du problème, il suffit évidemment de prouver que la condition est nécessaire. Supposons donc que $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de Bessel sur $L^2(I)$. Le cas $|J| \leq |I|$ est règlé par la proposition 3.1.5. Plaçons-nous dans le cas $|J| > |I|$.
Montrons que $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de Bessel dans $L^2(I \cup (a+I))$, quel que soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f \in L^2(I \cup (a+I))$. On a $I \cup (a+I) = (I \setminus (a+I)) \cup (a+I)$, où l'union du second membre est une union disjointe. Dès lors, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{J}} \left| \int_{I\cup(a+I)} f(x)e^{i\lambda_n x}dx \right|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{J}} \left| \int_{I\setminus(a+I)} f(x)e^{i\lambda_n x}dx + \int_{a+I} f(x)e^{i\lambda_n x}dx \right|^2 \\
&\leq 2\sum_{n\in\mathbb{J}} \left(\left| \int_{I\setminus(a+I)} f(x)e^{i\lambda_n x}dx \right|^2 + \left| \int_{a+I} f(x)e^{i\lambda_n x}dx \right|^2 \right) \\
&\leq 2B_1 \int_{I\setminus(a+I)} |f(x)|^2 dx + 2B_2 \int_{a+I} |f(x)|^2 dx \\
&\leq 2\sup\{B_1, B_2\} \int_{I\cup(a+I)} |f(x)|^2 dx,
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de Bessel dans $L^2(I)$ donc aussi dans $L^2(I \setminus (a+I))$ et dans $L^2(a+I)$, vu la proposition 3.1.5. D'où $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien une suite de Bessel dans $L^2(I \cup (a+I))$.
Pour conclure, il suffit de prendre un recouvrement de J par des intervalles translatés de I. $\square$

3.2 Caractérisation des frames d'exponentielles : la réponse de Jaffard

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du résultat obtenu par Jaffard concernant la caractérisation des frames d'exponentielles générées par une suite réelle.

3.2.1 Résultats auxiliaires

Afin de ne pas surcharger la démonstration du théorème de Jaffard, nous démontrons tout d'abord les deux résultats suivants.

Le premier de ces résultats est une conséquence du deuxième théorème de Duffin et Schaeffer 2.3.2. Il possède un intérêt propre dans la théorie des frames d'exponentielles.

Lemme 3.2.1. *Pour toute suite réelle $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ séparée et pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble de fonctions $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de Bessel sur $L^2(I)$.*

Démonstration. Quitte à renuméroter la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on peut supposer qu'elle satisfait à

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

En effet, nous ne travaillons ici qu'avec des séries absolument convergentes. L'hypothèse de séparabilité devient alors

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \delta, \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

pour un certain $\delta > 0$. De là, on a

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\delta} - \frac{\lambda_n}{\delta} \geq 1, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

Ensuite, on peut construire une suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$\left|\frac{\mu_k}{\delta} - k\right| \leq 1, \ \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\mu_{k+1}}{\delta} - \frac{\mu_k}{\delta} \geq \frac{1}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{3.3}$$

$$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ est une sous-suite de } (\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}}, \tag{3.4}$$

en renumérotant $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de manière adéquate. En effet, pour chaque entier k, s'il existe un λ_n tel que $|\frac{\lambda_n}{\delta} - k| \leq \frac{1}{2}$ (il y en a au maximum deux vu (3.1)), on note $\mu_k = \lambda_n$. Si il n'y a pas de tel λ_n (ou plus s'ils ont déjà été tous choisis lors d'une étape précédente), on note $\mu_k = k$. On initialise cette procédure avec $k = 0$ par exemple. Il est clair que la suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ainsi construite vérifie (3.2) et (3.4). Comme la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie les inégalités (3.1), la suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ satisfait également la condition (3.3).
En particulier, la suite $(\frac{\mu_k}{\delta})_{k\in\mathbb{Z}}$ est de densité uniforme 1 et donc le deuxième théorème de Duffin et Schaeffer 2.3.2 et la proposition 3.1.5 affirment que $\{e^{i\frac{\mu_k}{\delta}t} : k \in \mathbb{Z}\}$ est une frame sur $L^2(I)$, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $|I| < \pi$. Ensuite la proposition 3.1.6 montre que $\{e^{i\mu_k t} : k \in \mathbb{Z}\}$ est une frame sur $L^2(I)$, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $|I| < \frac{\pi}{\delta}$. Comme $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une sous-suite de $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, on a bien sûr

$$\sum_{n\in\mathbb{J}} |\langle f, e^{i\lambda_n t}\rangle_{L^2(I)}|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, e^{i\mu_k t}\rangle_{L^2(I)}|^2, \ \forall f \in L^2(I),$$

quel que soit l'intervalle I de $\mathbb{R}$, ce qui nous permet de conclure, vu la proposition 3.1.7. □

Voici le second résultat dont nous aurons besoin dans la démonstration du théorème de Jaffard.

Lemme 3.2.2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels. Si $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une frame sur $L^2(I)$, alors il existe une constante strictement positive C telle que pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$ de longueur 1, le nombre d'éléments de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ contenu dans J est inférieur à C.*

Démonstration. Vu la proposition 3.1.5, on peut supposer que l'intervalle I est de la forme $I =]-a, a[$ avec $a > 0$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ tel que $|\eta| \leq \varepsilon$, on ait

$$\left|\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{i\eta t}dt\right|^2 \geq \frac{1}{2}. \tag{3.5}$$

Ceci est possible car

$$\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{i\eta t}dt = \frac{1}{2a}\left(\frac{e^{i\eta a}-e^{-i\eta a}}{i\eta}\right) = \frac{\sin(\eta a)}{\eta a},$$

ce qui tend vers 1 losrque η tend vers 0.
Cela étant, montrons qu'il existe une constante strictement positive c telle que pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$ de longueur 2ε, le nombre d'éléments de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ contenu dans J est inférieur à c. Procédons par l'absurde et supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe un intervalle J_k de longueur 2ε tel que le nombre d'éléments de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ contenu dans J_k est supérieur à k. Dès lors, la suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ définie par

$$\mu_k := \text{ le centre de l'intervalle } J_k$$

est telle que le nombre d'éléments de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ contenu dans l'intervalle $[\mu_k-\varepsilon, \mu_k+\varepsilon]$ est au moins k, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Définissons maintenant les fonctions f_k sur I par

$$f_k(t) := e^{i\mu_k t}, \; k \in \mathbb{N}_0.$$

Les fonctions f_k ainsi définies appartiennent à $L^2(I)$. Dès lors, vu l'inégalité (3.5), on a

$$\sum_{n\in\mathbb{J}} \left|\langle f_k, e^{i\lambda_n t}\rangle_{L^2(I)}\right|^2 = \sum_{n\in\mathbb{J}} \left|\int_{-a}^{a} e^{i(\mu_k-\lambda_n)t}dt\right|^2 \geq \frac{k}{2}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.6}$$

car, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on a $|\mu_k - \lambda_n| \leq \varepsilon$ pour au moins k entiers n. Mais par définition d'une frame, il existe aussi une constante strictement positive B telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{J}} \left|\langle f_k, e^{i\lambda_n t}\rangle_{L^2(I)}\right|^2 \leq B\|f_k\|^2_{L^2(I)} = B|I|, \; \forall k \in \mathbb{Z},$$

où $|I| = 2a$ est la longueur de l'intervalle I, ce qui contredit l'inégalité (3.6).
Comme tout intervalle de longueur 1 peut être recouvert par au plus $\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 2$ intervalles de longueur 2ε, où $\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{1}{2\varepsilon}$, la constante

$$C := \left(\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 2\right) c$$

convient pour la thèse. Le lemme est ainsi démontré. □

Corollaire 3.2.3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels. Si $\left(e^{i\lambda_n t}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une frame sur $L^2(I)$, alors pour tout $N > 0$, il existe une constante strictement positive C_N telle que pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$ de longueur N, le nombre d'éléments de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ contenu dans J est inférieur à C_N.*

Démonstration. Vu le lemme 3.2.2, il existe une constante strictement positive C telle que pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$ de longueur 1, le nombre d'éléments de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ contenu dans J est inférieur à C. Comme tout intervalle de longueur $N > 0$ peut être recouvert par au plus $[N] + 2$ intervalles de longueur 1, où $[N]$ est la partie entière de N, la constante $C_N := ([N] + 2)C$ convient pour la thèse. □

Voici maintenant un calcul qui nous servira dans la démonstration du théorème de Jaffard.

Lemme 3.2.4. *Soit un intervalle borné* $]b, c[$ *de* $\mathbb{R}$. *Alors pour tout* $a \neq 0$, *on a*

$$\left|\int_b^c e^{iax} dx\right| = \frac{2}{|a|} \left|\sin\left(\frac{a(c-b)}{2}\right)\right|.$$

Démonstration. Soit $a \neq 0$. Alors

$$\int_b^c e^{iax} dx = \left[\frac{e^{iax}}{ia}\right]_b^c = \frac{e^{iac} - e^{iab}}{ia} = e^{\frac{iac}{2}+\frac{iab}{2}} \left(\frac{e^{\frac{iac}{2}-\frac{iab}{2}} - e^{\frac{iab}{2}-\frac{iac}{2}}}{ia}\right) = e^{\frac{ia(b+c)}{2}} \frac{2\sin\frac{a(c-b)}{2}}{a},$$

d'où la conclusion. □

3.2.2 Théorème de Jaffard

Démontrons à présent le théorème de Jaffard. Celui-ci donne la structure de toutes les suites réelles $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $\left(e^{i\lambda_n t}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une frame sur $L^2(I)$ pour un certain intervalle I de $\mathbb{R}$.

Théorème 3.2.5 (Jaffard). *Soient* $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *une suite de nombres réels. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe un intervalle I *de* $\mathbb{R}$ *tel que* $\left(e^{i\lambda_n t}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ *soit une frame sur* $L^2(I)$.

(ii)La suite Λ *peut être divisée en une suite séparée de densité uniforme* d, $d > 0$, *et un nombre fini de suites séparées, éventuellement finies.*

De plus, si (ii) est vrai, alors $\left(e^{i\lambda_n t}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une frame sur* $L^2(I)$ *pour tout intervalle* I *tel que* $|I| < 2\pi d$.

Démonstration. Prouvons (ii)⇒(i). Supposons que la suite Λ peut être divisée en p suites $\Lambda^1, \ldots, \Lambda^p$, où Λ^1 est une suite séparée de densité uniforme d, $d > 0$, et $\Lambda^2, \ldots, \Lambda^p$ sont des suites séparées. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $|I| < 2\pi d$. Vu le deuxième théorème de Duffin-Schaeffer 2.3.2 et la proposition 3.1.1, la suite de fonctions $(e^{i\lambda t})_{\lambda\in\Lambda^1}$ est une frame sur $L^2(I)$. Dès lors, il existe des constantes strictement positives A et B telles que

$$A\|f\|^2_{L^2(I)} \leq \sum_{\lambda\in\Lambda^1} \left|\langle f, e^{i\lambda t}\rangle_{L^2(I)}\right|^2 \leq B\|f\|^2_{L^2(I)}, \ \forall f \in L^2(I). \tag{3.7}$$

Ensuite, comme les suites Λ^j sont séparées pour $j = 2, \ldots, p$, le lemme 3.2.1 affirme que les suites de fonctions $(e^{j\lambda t})_{\lambda\in\Lambda^j}$, $j = 2, \ldots, p$, sont des suites de Bessel sur $L^2(I)$, c'est-à-dire qu'il existe des constantes strictement positives C_j, $j = 2, ..., p$, telles que

$$\sum_{\lambda\in\Lambda^j} \left|\langle f, e^{i\lambda t}\rangle_{L^2(I)}\right|^2 \leq C_j \ \|f\|^2_{L^2(I)}, \ \forall f \in L^2(I). \tag{3.8}$$

En rassemblant les inégalités (3.7) et (3.8), on obtient

$$A\|f\|^2_{L^2(I)} \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} \left|\langle f, e^{i\lambda t}\rangle_{L^2(I)}\right|^2 \leq B'\|f\|^2_{L^2(I)}, \ \forall f \in L^2(I).$$

avec $B' = p \sup\{B, C_2, \ldots, C_p\}$. Dès lors, l'ensemble de fonctions $(e^{i\lambda t})_{\lambda\in\Lambda}$ est une frame sur $L^2(I)$ et (i) est vérifié.

Nous avons également montré la deuxième partie de l'énoncé.

Prouvons (i)$\Rightarrow$(ii). Il suffit en fait de prouver qu'il existe $N \in \mathbb{N}_0$ et C_N un entier supérieur ou égal à 1 tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le nombre A_N^k d'éléments de la suite Λ dans le semi-intervalle $[kN, (k+1)N[$ est tel que

$$1 \leq A_N^k \leq C_N.$$

En effet, si on a cela, on peut définir une sous-suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de la suite Λ en sélectionnant un élément de la suite Λ dans chaque semi-intervalle $[2kN, (2k+1)N[$. La suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ vérifie alors

$$\begin{gathered}|\mu_{k+1} - \mu_k| = \mu_{k+1} - \mu_k > 2(k+1)N - (2k+1)N = N \\ |\mu_k - 2kN| \leq N\end{gathered}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Donc $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite séparée de densité uniforme $\frac{1}{2N}$. Dès lors, la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ privée des μ_k (renumérotée de manière convenable) peut être divisée en au maximum $2C_N - 1$ suites séparées en sélectionnant au plus un des λ_n restants dans chaque semi-intervalle de la forme $[2kN, (2k+1)N[$ (au plus $C_N - 1$ éléments) ou de la forme $[(2k+1)N, (2k+2)N[$ (au plus C_N éléments). D'où on a (ii).

Montrons l'existence d'un tel N. Vu le corollaire 3.2.3, pour tout nombre $N > 0$, il existe un nombre $C_N > 0$ tel que le nombre A_N^k d'éléments de la suite Λ dans le semi-intervalle $[kN, (k+1)N[$ vérifie $A_N^k \leq C_N$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, il nous reste à montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}_0$ tel que $A_N^k \geq 1$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Procédons par l'absurde et supposons que pour tout $N \in \mathbb{N}_0$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que le semi-intervalle $[kN, (k+1)N[$ ne contient aucun élément de la suite Λ. Soit μ_N le centre de cet intervalle. Considérons les fonctions f_N définies sur $\mathbb{R}$ par $f_N(t) := e^{i\mu_N t}$. Alors, vu le lemme 3.2.4, on a

$$\begin{aligned}\left|\langle f_N, e^{i\lambda_n t}\rangle\right|^2 &= \left|\int_I e^{i\mu_N t}e^{-i\lambda_n t}\right|^2 = \left|\int_I e^{i(\mu_N-\lambda_n)t)}\right|^2 \\ &= \frac{4}{|\mu_N - \lambda_n|^2}\left|\sin\left(\frac{(\mu_N-\lambda_n)|I|}{2}\right)\right|^2 \\ &\leq \frac{4}{|\mu_N - \lambda_n|^2}, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Considérons à présent les semi-intervalles $[m, m+1[$, $m \in \mathbb{Z}$. Si m et n sont des entiers tels que $\lambda_n \in [m, m+1[$, alors on a

$$|\lambda_n - \mu_N| = |m - \mu_N - (m - \lambda_n)| \geq |m - \mu_N| - |m - \lambda_n| \geq |m - \mu_N| - 1,$$

vu l'inégalité triangulaire. D'autre part, il y a au plus C_1 éléments de la suite Λ appartenant au semi-intervalle $[m, m+1[$ et il n'y en a aucun si $|m - \mu_N| < \frac{N}{4}$ avec $N > 4$. En effet, dans ce cas, on a $[m, m+1[\subseteq [kN, (k+1)N[$ et donc, vu ce qui précède, le semi-intervalle $[m, m+1[$ ne contient aucun élément de Λ. Dès lors, pour $N > 4$, vu l'inégalité (3.9), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_n |\langle f_N, e^{i\lambda_n t}\rangle|^2 &= \sum_m \sum_{n:\ \lambda_n\in[m,m+1[} |\langle f_N, e^{i\lambda_n t}\rangle|^2 \\
&= \sum_{m:\ |m-\mu_N|\geq \frac{N}{4}} \sum_{n:\ \lambda_n\in[m,m+1[} |\langle f_N, e^{i\lambda_n t}\rangle|^2 \\
&\leq \sum_{m:\ |m-\mu_N|\geq \frac{N}{4}} \sum_{n:\ \lambda_n\in[m,m+1[} \frac{4}{|\mu_N - \lambda_n|^2} \\
&\leq \sum_{m:\ |m-\mu_N|\geq \frac{N}{4}} \frac{4C_1}{(|m-\mu_N| - 1)^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi pour $N > 8$, on a

$$\sum_n |\langle f_N, e^{i\lambda_n t}\rangle|^2 \leq \sum_{l:\ |l|\geq \frac{N}{4}} \frac{4C_1}{(|l| - \frac{3}{2})^2} \longrightarrow 0 \text{ si } N \longrightarrow +\infty. \tag{3.10}$$

Si N est un entier pair, ceci est immédiat car alors μ_N est un entier. Supposons donc que N est un entier impair. On peut alors écrire μ_N sous la forme $\mu_N = M + \frac{1}{2}$. Distinguons ensuite les deux cas suivants.
Premièrement, supposons que $m - \mu_N = m - M - \frac{1}{2} \geq 0$. On a alors

$$(|m-\mu_N| - 1)^2 = \left(m - M - \frac{1}{2} - 1\right)^2 = \left(m - M - \frac{3}{2}\right)^2,$$

où $m - M$ est un entier tel que $m - M \geq m - M - \frac{1}{2}$ donc tel que

$$|m - M| \geq \frac{N}{4} \text{ lorsque } |m - \mu_N| \geq \frac{N}{4}.$$

Deuxièmement, supposons que $m - \mu_N = m - M - \frac{1}{2} < 0$. On a alors

$$(|m-\mu_N| - 1)^2 = \left(M + \frac{1}{2} - m - 1\right)^2 = \left(M - m - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(M - m + 1 - \frac{3}{2}\right)^2,$$

où $M - m + 1$ est un entier tel que $M - m + 1 \geq M + \frac{1}{2} - m$ donc tel que

$$|M - m + 1| \geq \frac{N}{4} \text{ lorsque } |m - \mu_N| \geq \frac{N}{4}.$$

L'inégalité (3.10) est ainsi établie.
Mais comme $\|f_N\|^2 = |I|$ pour tout $N > 0$, on a également par hypothèse

$$A\,|I| \leq \sum_n |\langle f_N, e^{i\lambda_n t}\rangle|^2, \ \forall N > 0,$$

ce qui nous amène à une contradiction vu (3.10). Ceci clôture la preuve de la première partie du théorème. □

3.3 Remarques sur le cas complexe

Dans le cas d'une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes, nous n'avons pas de résultat similaire au théorème de Jaffard. A ce jour, une caractérisation complète des frames d'exponentielles reste encore à trouver. Nous avons cependant le résultat suivant, obtenu par Duffin et Schaeffer en 1952 dans leur article "A class of nonharmonic Fourier series" ([7]). Celui-ci est un théorème de stabilité des frames d'exponentielles engendrées par une suite complexe se situant dans une bande parallèle à l'axe réel.

Théorème 3.3.1 (Duffin-Schaeffer 3). *Soient $\gamma > 0$, $\beta > 0$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes vérifiant $|\Im\lambda_n| \leq \beta$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Si la suite de fonctions $(e^{i\Re\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une frame sur $L^2(]-\gamma,\gamma[)$, alors il en est de même pour la suite $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$.*

La preuve de ce théorème proposée par Duffin et Schaeffer dans [7] est assez longue. La difficulté provient du fait que ce théorème demande que $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une frame sur le même espace que $(e^{i\Re\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$. Nous donnons ici preuve d'une version plus faible de ce théorème, considérablement simplifiée grâce au théorème de Jaffard.

Théorème 3.3.2. *Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes vérifiant $|\Im\lambda_n| \leq \beta$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. S'il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que la suite de fonctions $(e^{i\Re\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une frame sur $L^2(I)$, alors il existe $d > 0$ tel que la suite $(e^{i\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une frame sur $L^2(J)$, pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$ tel que $|J| \leq 2\pi d$.*

Démonstration. Posons $\Lambda := (\Re\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Comme par hypothèse, la suite $(e^{i\Re\lambda_n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une frame sur $L^2(]-\gamma,\gamma[)$, vu le théorème de Jaffard, la suite Λ peut être divisée en une suite Λ^1 séparée de densité uniforme $d > 0$ et en un nombre fini de suites séparées $\Lambda^2, \ldots, \Lambda^p$. Notons alors Δ^1 la suite formée des éléments de $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tels que $\Re\lambda_n \in \Lambda^1$. Il s'agit d'une suite séparée de densité uniforme d puisque par hypothèse, on a $|\Im\lambda_n| \leq \beta$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. De même, notons $\Delta^2, \ldots, \Delta^p$ les suites formées des éléments de $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tels que $\Re\lambda_n \in \Lambda^2, \ldots, \Lambda^p$ respectivement. Ce sont des suites séparées. Dès lors, de la même manière que dans la première partie de la preuve du théorème de Jaffard, vu le deuxième théorème de Duffin-Schaeffer et le lemme 3.2.1, on obtient que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une frame sur $L^2(]-\pi d,\pi d[)$. D'où la conclusion vu la proposition 3.1.5. □

Bibliographie

[1] Bastin F., Laubin P., *Fonctions d'une variable complexe,* 2CM, Liège, 2001.

[2] Boigelot C., *Ondelettes biorthogonales,* Mémoire de licence, Liège, 1994-1995.

[3] Christensen O., *Frames, Riesz bases, and discrete Gabor/Wavelet expansions,* Bulletin of the AMS, 38, 3, July (2001), 273-291.

[4] Christensen O., *An introduction to frames and Riesz bases,* Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser, 2003.

[5] Conway J.B., *Functions of One Complex Variable I,* second edition, Graduate Texts in mathematics, Springer, 1995.

[6] Duffin R.J. et Schaeffer A.C., *Power series with bounded coefficients,* Amer. Math. J. 67 (1945), 141-152.

[7] Duffin R.J. et Schaeffer A.C., *A class of nonharmanic Fourier series,* Trans. AMS 72 (1952), 341-366.

[8] Garnir H.G. et Gobert J., *Fonctions d'une variable complexe,* Paris, Dunod, Louvain, Librairie Universitaire, 1965.

[9] Hernandez E., Weiss G., *A first course on wavelets,* CRC Press, Boca Raton, New York, London, Tokyo, 1996.

[10] Jaffard S., *A density criterion for frames of complex exponentials,* Michigan Math. J. 38, 3 (1991), 339-348.

[11] Lang S., *Complex analysis,* 4e édition, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1999.

[12] Schmets J., *Introduction aux espaces fonctionnels,* 2CM, Liège, 2000-2001.

[13] Schmets J., *Analyse fonctionnelle,* LM, Liège, 2002-2003.

[14] Schneiders J.P., *Analyse Complexe,* LM (option), Liège, 2002-2003.

[15] Schwartz L., *Analyse hilbertienne,* Collection Méthodes, 1979.

[16] Vallée F., *Transformations en ondelettes,* Mémoire de licence, Liège, 1992-1993.

[17] Young R.M., *An introduction to nonharmonic Fourier series,* Academic Press, New York, 1980.

Table des matières