Correction de l'examen de Mathématiques pour l'informatique 1 du 21 juin 2019

Consignes générales

— Répondre aux parties "théorie" et "exercices" sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom.

— Répondre uniquement sur les feuilles fournies.

— Calculatrices (ou équivalents) non autorisées.

— Justifier vos réponses.

1. Théorie

(1) Qu'est-ce qu'une assertion logique ?

(2) Sur quelle équivalence logique se base la technique de démonstration par l'absurde ?

(3) Décrire les éléments du produit cartésien $A_1 \times \cdots \times A_k$, où k est un entier plus grand ou égal à 1.

(4) Qu'est-ce qu'une injection ?

(5) Donner la table de multiplication de $\mathbb{Z}_7$.

(6) Décrire l'algorithme d'Euclide (recherche du PGCD) et démontrer que celui-ci est correct et se termine toujours.

(7) Le produit matriciel est-il commutatif ? Justifier.

Solution. Voir syllabus.

2. Exercices

(1) Dans cet exercice, nous identifierons les valeurs de vérité VRAI et FAUX des variables propositionnelles et des propositions aux chiffres binaires 1 et 0, respectivement.

Construire quatre propositions a, b, c, d à partir des variables propositionnelles x, y, z, t de sorte que

— si le nombre représenté en base 2 par $xyzt$ a un inverse dans $\mathbb{Z}_{16}$, alors $abcd$ est la représentation en base 2 de cet inverse

— si le nombre représenté en base 2 par $xyzt$ n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}_{16}$, alors $abcd$ vaut 0000.

Les propositions a, b, c, d devront être sous forme normale disjonctive et simplifiées au maximum.

Solution. Un élément de $\mathbb{Z}_{16}$ est inversible si et seulement s'il est premier avec 16, c'est-à-dire si et seulement s'il est impair, puisque $16 = 2^4$. Il vient immédiatement $1^{-1} = 1$, $15^{-1} = (-1)^{-1} = -1 = 15$. De même, on trouve (via l'algorithme d'Euclide par exemple) que $3^{-1} = 11$, $5^{-1} = 13$, $7^{-1} = 7$ et $9^{-1} = 9$. On peut donc construire la table de vérité de a, b, c, d :

x	y	z	t	nb. représenté par $xyzt$	inverse	a	b	c	d
0	0	0	0	0	/	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	2	/	0	0	0	0
0	0	1	1	3	11	1	0	1	1
0	1	0	0	4	/	0	0	0	0
0	1	0	1	5	13	1	1	0	1
0	1	1	0	6	/	0	0	0	0
0	1	1	1	7	7	0	1	1	1
1	0	0	0	8	/	0	0	0	0
1	0	0	1	9	9	1	0	0	1
1	0	1	0	10	/	0	0	0	0
1	0	1	1	11	3	0	0	1	1
1	1	0	0	12	/	0	0	0	0
1	1	0	1	13	5	0	1	0	1
1	1	1	0	14	/	0	0	0	0
1	1	1	1	15	15	1	1	1	1

En simplifiant au moyen des tables de Karnaugh, on arrive aux propositions suivantes :

$a \equiv (\neg x \wedge \neg y \wedge z \wedge t) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge t) \vee (x \wedge y \wedge z \wedge t) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge t)$
$b \equiv y \wedge t$
$c \equiv z \wedge t$
$d \equiv t$

(2) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}_{42}$.

(a) $16x + 15 = 0$.
(b) $15x + 18 = 0$.
(c) $5x + 17 = 0$.

Solution.

(a) Cette équation équivaut à

$$16 \cdot_{42} x = 27$$

ce qui est équivalent à

$$\exists q \in \mathbb{Z},\ 16x = 42q + 27$$

ou encore

$$\exists q \in \mathbb{Z},\ 16x - 42q = 27.$$

Le membre de gauche de cette dernier égalité étant pair quelque soit q, et le membre de droite impair, il n'existe pas de tel q, et l'équation n'admet pas de solution.

(b) Cette équation équivaut à

$$15 \cdot_{42} x = 24,$$

ce qui est équivalent à

$$\exists q \in \mathbb{Z},\ 15x = 42q + 24,$$

ou encore à

$$\exists q \in \mathbb{Z},\ 5x = 14q + 8,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{MOD}(5x, 14) = 8,$$

ce que l'on peut encore réécrire

$$\mathrm{MOD}(5\,\mathrm{MOD}(x, 14), 14) = 8.$$

En posant $y = \mathrm{MOD}(x, 14)$, on s'intéresse donc aux solutions de l'équation $5y = 8$ dans $\mathbb{Z}_{14}$. Or, 5 est inversible dans $\mathbb{Z}_{14}$ et son inverse est 3. Ainsi, l'équation $5 \cdot_{14} y = 8$ est équivalente à $y = 3 \cdot_{14} 8$, ou encore à $y = 10$. L'équation de départ se réécrit alors

$$\mathrm{MOD}(x, 14) = 10$$

c'est-à-dire

$$x = 10 \text{ ou } x = 24 \text{ ou } x = 38.$$

L'ensemble des solutions est donc $\{10, 24, 38\}$.

(c) L'élément 5 est inversible dans $\mathbb{Z}_{42}$; son inverse est 17. Dès lors, l'équation est équivalente à

$$5 \cdot_{42} x = 25$$

c'est-à-dire

$$17 \cdot_{42} 5 \cdot_{42} x = 17 \cdot_{42} 25,$$

ou encore

$$x = 5.$$

L'unique solution de l'équation est donc $x = 5$.

(3) (a) Calculer le déterminant des matrices A et B suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i & -1 \\ 2 & 4 & -i \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice C donnée ci-dessous est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -i \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -i & 3 \end{pmatrix}$$

Solution.

(a) (i) En appliquant la règle de Sarrus, on trouve immédiatement

$$\det(A) = 36 - 4 + 2 + 8 + 6i - 6i = 42.$$

(ii) En effectuant $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, puis en appliquant deux fois la première loi des mineurs et en terminant par la règle de Sarrus, on trouve

$$\det(B) = 120.$$

(b) On a $\det(C) = 6i - 8 \neq 0$; la matrice C est donc inversible. Son inverse est

$$C^{-1} = \frac{1}{6i-8}\begin{pmatrix} -9+4i & -13 & 16-3i \\ 5 & 9+2i & -12-i \\ 6-i & 8+3i & -13 \end{pmatrix}.$$

(4) Prouver que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

pour tout $n \geq 1$.

Solution. Procédons par récurrence sur n. Tout d'abord, si $n = 1$, le membre de gauche est égal à $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 = 1$ tandis que le membre de droite vaut $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$. La formule est donc satisfaite pour $n = 1$. A présent, considérons un certain $n \geq 1$ et supposons la formule vraie pour ce n. Notre but est de montrer qu'elle est vraie également pour $n+1$; en d'autres termes, on suppose que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

et l'on souhaite démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

On a successivement

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) \\
&= (n+1)^2\frac{n^2+4n+4}{4} \\
&= (n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2,
\end{aligned}$$

d'où la conclusion.

(5) Discuter la compatibilité et le rang du système suivant en fonction du paramètre réel α. Dans les cas où il *n'est pas* de Cramer, le résoudre dans $\mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+\alpha y+2z &=& \alpha \\ -2x+y+(\alpha-2)z &=& 1 \\ \alpha x+y+2z &=& 2\alpha-1 \end{array}\right.$$

Solution – méthode 1. Nous allons ici appliquer la méthode de Gauss.

En effectuant $L_2 \leftarrow L_2+2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3-\alpha L_1$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+\alpha y+2z &=& \alpha \\ (1+2\alpha)y+(\alpha+2)z &=& 1+2\alpha \\ (1-\alpha^2)y+(2-2\alpha)z &=& 2\alpha-1-\alpha^2 \end{array}\right.$$

Tous les coefficients des inconnues des deux dernières lignes dépendant de α, aucun d'entre eux n'est à coup sûr différent de 0 ; nous allons donc devoir discuter.

Nous pouvons par exemple traiter à part le cas $\alpha=-1/2$. Il est aisé de vérifier en remplaçant α par $-1/2$ que le système est dans ce cas de Cramer : il admet donc une unique solution et est de rang 3.

Nous supposerons donc dorénavant que $\alpha \neq -1/2$. Alors $1+2\alpha \neq 0$, et on peut effectuer $L_3 \leftarrow (1+2\alpha)L_3-(1-\alpha^2)L_2$. On obtient alors le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+\alpha y+2z &=& \alpha \\ (1+2\alpha)y+(\alpha+2)z &=& 1+2\alpha \\ (\alpha^3-2\alpha^2+\alpha)z &=& 4\alpha^2-2\alpha-2 \end{array}\right.$$

On a

$$\alpha^3-2\alpha^2+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha-1)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ou } \alpha=1.$$

Si $\alpha=0$ le système devient

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2z &=& 0 \\ y+2z &=& 1 \\ 0 &=& -2 \end{array}\right.$$

Il est donc de rang 2 et incompatible.

Si $\alpha=1$, il devient

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z &=& 1 \\ 3y+3z &=& 3 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right.$$

Il est alors de rang 2 et compatible. L'ensemble des solutions est

$$\left\{\begin{pmatrix} -z \\ 1-z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Enfin, si $\alpha \notin \{0,1\}$ (ceci inclut le cas $\alpha=-1/2$ au vu de ce qui précède), le système est de Cramer. Il est donc compatible et de rang 3.

Solution – méthode 2. Calculons le déterminant de la matrice des coefficients :

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ -2 & 1 & \alpha-2 \\ \alpha & 1 & 2 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha-1)^2.$$

On en conclut que, si $\alpha \notin \{0, 1\}$, le système est de rang 3. Il est donc de Cramer et admet une solution unique.

Il reste à traiter les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Il suffit pour cela de remplacer α par sa valeur ; voir la méthode 1 pour les conclusions.

Correction de l'interrogation de
Mathématiques pour l'informatique 1
du 29 octobre 2019

Théorie

1. En logique propositionnelle, qu'appelle-t-on une proposition satisfaisable ? Donner un exemple d'une proposition satisfaisable et un exemple d'une proposition non satisfaisable.

   Solution
   Une proposition est dite satisfaisable s'il existe une distribution des valeurs de vérité de ses variables qui la rend vraie. Par exemple, la proposition $\varphi \equiv x$ est satisfaisable car elle est vraie pour la valeur de vérité $x = 1$ et la proposition $\psi \equiv x \wedge \neg x$ ne l'est pas car sa table de vérité est

x	$\neg x$	$x \wedge \neg x$
0	1	0
1	0	0

   ce qui montre que ψ est faux que la valeur de x soit 0 ou 1.

2. Sur quelle équivalence logique se base la technique de démonstration par contraposition ? Expliquer le raisonnement d'une telle démonstration.

   Solution
   La technique de démonstration par contraposition se base sur l'équivalence logique

   $$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi.$$

   Pour démontrer l'implication $\varphi \Rightarrow \psi$ en utilisant la contraposition, on suppose que ψ est faux et on cherche à prouver que φ doit aussi être faux.

3. Démontrer que la composée de deux injections est une injection. En déduire que si A est un ensemble dénombrable et s'il existe une injection d'un ensemble B dans A, alors B est aussi dénombrable.

   Solution
   Soient des fonctions injectives $f \colon A \to B$ et $g \colon B \to C$. Nous souhaitons montrer que la fonction composée $g \circ f \colon A \to C,\ a \mapsto g(f(a))$ est injective également. Soient $a, a' \in A$ tels que $a \neq a'$. Comme f est une injection, on a $f(a) \neq f(a')$. Ensuite, comme g est aussi une injection, on a $g(f(a)) \neq g(f(a'))$. Ainsi, $g \circ f$ est bien une injection.
   Soit A un ensemble dénombrable. Cela signifie qu'il existe une injection $f \colon A \to \mathbb{N}$. Si B est un ensemble pour lequel il existe une injection $g \colon B \to A$, alors la fonction composée $f \circ g \colon B \to N$ est injective, donc B est dénombrable aussi.

Exercices

1. Un patron de restaurant désire créer un menu fluctuant afin de ne pas toujours proposer les mêmes plats à ses clients. Il ordonne donc à son serveur de respecter les consignes suivantes (où A, B et C désignent les trois plats principaux proposés à la carte) :

   (a) quand tu ne proposes pas A, tu dois proposer B ;

   (b) lorsque A et B sont proposés, C ne doit pas l'être ;

   (c) si tu proposes C ou si tu ne proposes pas A, alors B ne doit pas être proposé.

   Le serveur désirant mémoriser facilement ces trois consignes, comment peut-il les résumer avec une forme normale conjonctive de longueur minimale ? Exprimer ce résumé en français.

   Solution

   Si on considère les variables propositionnelles α, β, γ représentant respectivement "A est proposé", "B est proposé" et "C est proposé", les trois consignes données sont logiquement équivalentes à

   (a) $(\neg\alpha) \Rightarrow \beta \equiv \varphi_1$

   (b) $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \neg\gamma \equiv \varphi_2$

   (c) $(\gamma \vee \neg\alpha) \Rightarrow \neg\beta \equiv \varphi_3$

   et le discours tenu par le patron à $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \equiv \phi$.

   Déterminons la table de vérité de ϕ :

α	β	γ	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\neg\gamma$	φ_1	$\alpha \wedge \beta$	φ_2	$\gamma \vee \neg\alpha$	φ_3	ϕ
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0

   Utilisons alors une table de Karnaugh de $\neg\phi$ pour déterminer une forme normale conjonctive de ϕ :

		(α, β)			
	$\neg\phi$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$
γ	0	1	1	0	0
	1	1	1	1	0

   Cette table ne contient aucun rectangle de taille 8, elle en contient par contre un de taille 4, à savoir

		(α, β)			
	$\neg\phi$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$
γ	0	**1**	**1**	0	0
	1	**1**	**1**	1	0

   qui correspond à la proposition $\neg\alpha$. Le dernier 1 appartient au rectangle de taille 2

		(α, β)			
	$\neg\phi$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$
γ	0	1	1	0	0
	1	1	**1**	**1**	0

qui correspond à la proposition $\beta \wedge \gamma$. Ainsi, on obtient que $\neg\phi \equiv \neg\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$ et donc que

$$\begin{aligned}\phi &\equiv \neg(\neg\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \\ &\equiv (\neg\neg\alpha) \wedge \neg(\beta \wedge \gamma) \\ &\equiv \alpha \wedge (\neg\beta \vee \neg\gamma)\end{aligned}$$

Une forme normale conjonctive de longueur minimale de ϕ est donc donnée par

$$\boxed{\alpha \wedge (\neg\beta \vee \neg\gamma)}$$

ce qui se traduit en français par : "A est proposé et B ou C ne l'est pas".

Autre méthode

Tenant compte des équivalences logiques suivantes pour les trois consignes données

(a) $\varphi_1 \equiv (\neg\alpha) \Rightarrow \beta \equiv \alpha \vee \beta$

(b) $\varphi_2 \equiv (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \neg\gamma \equiv \neg(\alpha \wedge \beta) \vee \neg\gamma \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta) \vee \neg\gamma$

(c) $\varphi_3 \equiv (\gamma \vee \neg\alpha) \Rightarrow \neg\beta \equiv \neg(\gamma \vee \neg\alpha) \vee \neg\beta \equiv (\neg\gamma \wedge \alpha) \vee \neg\beta$

le discours tenu par le patron est lui logiquement équivalent à

$$\begin{aligned}\phi &\equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \\ &\equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma) \wedge ((\neg\gamma \wedge \alpha) \vee \neg\beta) \\ &\equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma) \wedge ((\neg\gamma \vee \neg\beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)).\end{aligned}$$

En remarquant alors que, d'une part

$$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta) \equiv \alpha$$

et, d'autre part,

$$(\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma) \wedge (\neg\gamma \vee \neg\beta) \equiv \neg\beta \vee \neg\gamma$$

on conclut directement que

$$\boxed{\phi \equiv \alpha \wedge (\neg\beta \vee \neg\gamma)}.$$

Cette proposition est bien de longueur minimale car au vu de la table de vérité de ϕ, la valeur de vérité de ϕ dépend effectivement des trois variables propositionnelles α, β, γ. En effet, si $\phi(\alpha, \beta, \gamma)$ désigne la valeur de vérité de ϕ en fonction des valeurs de vérité de α, β, γ, on observe que

- α a de l'influence car $\phi(0,0,0) \neq \phi(1,0,0)$
- β a de l'influence car $\phi(1,0,1) \neq \phi(1,1,1)$
- γ a de l'influence car $\phi(1,1,0) \neq \phi(1,1,1)$.

Une proposition équivalente à ϕ doit donc contenir des occurences de α, β, γ et donc avoir une longueur au moins 3.

2. On considère les ensembles $E = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ et $N = \{0, 1, 2\}$.
   (a) Donner le produit cartésien de E et N.
   (b) Préciser si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier :

   i. $\emptyset \in E$
   ii. $\emptyset \subseteq E$
   iii. $\{b, a\} \in E$
   iv. $a \in E$
   v. $\{a, b\} \subset E$
   vi. $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(E)$

   (c) Soit R la relation de E dans N telle que $e \, R \, n$ si e contient exactement n éléments.
   i. En supposant $a \neq b$, cette relation est-elle une fonction ? une fonction injective ? une fonction surjective ?
   ii. Qu'en est-il si on suppose $a = b$?

Solution

(a) On a

$$\begin{aligned} E \times N \;=\; \Big\{ & (\emptyset, 0), (\emptyset, 1), (\emptyset, 2), (\{a\}, 0), (\{a\}, 1), (\{a\}, 2), (\{b\}, 0), (\{b\}, 1), \\ & (\{b\}, 2), (\{a, b\}, 0), (\{a, b\}, 1), (\{a, b\}, 2) \Big\}. \end{aligned}$$

(b) i. Vrai car $\emptyset$ est un élément de $E = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
ii. Vrai car $\emptyset$ est inclus dans tout ensemble.
iii. Vrai car $\{b, a\} = \{a, b\}$ est un élément de $E = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
iv. Faux. L'ensemble $\{a\}$ est un élément de E mais pas a.
v. Faux. L'ensemble $\{a, b\}$ est un élément de E mais il n'est pas inclus dans E.
vi. Vrai car $\emptyset$ est un élément de E, ainsi $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(E)$.

(c) i. Si $a \neq b$, on a

$$R = \Big\{ (\emptyset, 0), (\{a\}, 1), (\{b\}, 1), (\{a, b\}, 2) \Big\}.$$

Ainsi, R est une fonction surjective dans N. En revanche, elle n'est pas injective car $R(\{a\}) = R(\{b\}) = 1$.

ii. Si $a = b$, on a $E = \{\emptyset, \{a\}\}$ et donc

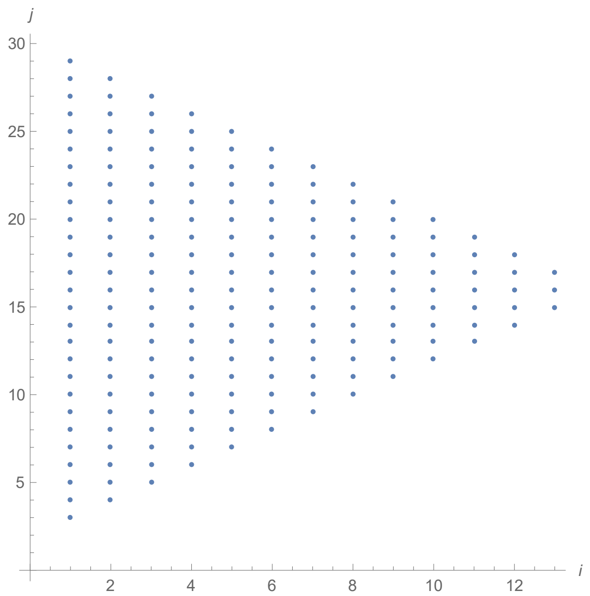
$$R = \Big\{ (\emptyset, 0), (\{a\}, 1) \Big\}.$$

Ainsi, R est une fonction injective. En revanche, elle n'est plus surjective car 2 n'est l'image d'aucun élément de E par cette relation.

3. Permuter les sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{13} \sum_{j=i+2}^{30-i} |i+j|$$

Solution
Les indices $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ intervenant dans la somme sont représentés ci-dessous.



On remarque donc que $j \in \{3, \ldots, 29\}$. En outre, on a

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq 13 \\ i+2 \leq j \leq 30-i \end{cases} \iff \begin{cases} 3 \leq j \leq 29 \\ 1 \leq i \\ i \leq 13 \\ i+2 \leq j \\ j \leq 30-i \end{cases} \iff \begin{cases} 3 \leq j \leq 29 \\ 1 \leq i \\ i \leq 13 \\ i \leq j-2 \\ i \leq 30-j \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3 \leq j \leq 29 \\ 1 \leq i \\ i \leq \min(13, j-2, 30-j) \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{13} \sum_{j=i+2}^{30-i} |i+j| &= \sum_{j=3}^{29} \sum_{i=1}^{\min(13,j-2,30-j)} |i+j| \\ &= \sum_{j=3}^{15} \sum_{i=1}^{j-2} |i+j| + \sum_{i=1}^{13} |i+16| + \sum_{j=17}^{29} \sum_{i=1}^{30-j} |i+j|. \end{aligned}$$

4. On considère la suite récurrente définie par

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \quad \forall n \geq 2.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n.$$

Solution

Procédons par récurrence (d'ordre 2) sur $n \in \mathbb{N}$.

Cas de base ($n = 0$ et $n = 1$)

La formule considérée est vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$ puisque

$$3 \cdot 2^0 - 2 \cdot 3^0 = 3 - 2 = 1 = a_0$$

et

$$3 \cdot 2^1 - 2 \cdot 3^1 = 6 - 6 = 0 = a_1.$$

Pas de récurrence

Supposons que $n \geq 1$ et que la formule considérée est vraie pour $n - 1$ et n, c'est-à-dire que

$$a_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1} \qquad \text{et} \qquad a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$$

et montrons qu'elle est encore vraie pour $n + 1$, c'est-à-dire que

$$a_{n+1} = 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1}.$$

Alors

$$\begin{array}{rcll}
a_{n+1} & = & 5a_n - 6a_{n-1} & \text{(définition avec } n+1 \geq 2\text{)} \\
& = & 5\left(3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n\right) - 6\left(3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1}\right) & \text{(hyp. de récurrence)} \\
& = & 15 \cdot 2^n - 10 \cdot 3^n - 18 \cdot 2^{n-1} + 12 \cdot 3^{n-1} & \\
& = & (30 - 18) \cdot 2^{n-1} - (30 - 12) \cdot 3^{n-1} & \\
& = & 12 \cdot 2^{n-1} - 18 \cdot 3^{n-1} & \\
& = & 3 \cdot 4 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 9 \cdot 3^{n-1} & \\
& = & 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1}. &
\end{array}$$

Conclusion

Tenant compte des cas de base et de récurrence, la formule considérée est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Examen de Mathématiques pour l'informatique 1

20 janvier 2020

Consignes générales

— Répondre uniquement sur les feuilles fournies.

— Les feuilles rendues doivent être numérotées et comporter chacune vos nom et prénom.

— Répondre à la théorie en un seul tenant.

— Répondre à chaque exercice sur une feuille séparée.

— Calculatrices (ou équivalents) non autorisées.

1. Théorie

(1) Qu'est-ce qu'une assertion logique ? Donner un exemple d'une phrase en français qui soit une assertion logique et d'une autre qui n'en soit pas.

(2) Lorsqu'on souhaite démontrer une alternative $\phi \vee \psi$ à partir d'une hypothèse α, quelle équivalence logique peut-on utiliser pour se donner une hypothèse supplémentaire ?

(3) Soient A, B, C des ensembles. Décrire les éléments du produit cartésien $A \times B \times C$.

(4) Définir la notion d'ensemble dénombrable. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est-il dénombrable ? Justifier votre réponse.

(5) Donner les tables d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}_4$.

(6) Énoncer le théorème de décomposition en base entière. Décrire l'algorithme glouton et démontrer que cet algorithme est correct. Illustrer son exécution pour décomposer l'entier 437 en base 3.

(7) Qu'est-ce qu'un système de Cramer ? Combien de solutions un tel système admet-il ? Fournir une preuve de votre réponse.

2. Exercices

(1) Construire une table de Karnaugh valide pour la proposition φ dont la table de vérité est détaillée ci-dessous et en déduire une forme normale disjonctive de longueur minimale pour φ.

p	q	r	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Solution : Une table de Karnaugh de φ est donnée par

φ		(p,q)			
		(0,0)	(0,1)	(1,1)	(1,0)
(r)	0	1	1	1	1
	1	0	0	1	0

Tenant compte de la première ligne de 1 (rectangle de taille 4), on constate que la proposition φ est vraie lorsque la variable r est fausse, soit lorsque $\neg r$ est vraie. De plus, nous tirons de la troisième colonne (rectangle de taille 2) que la proposition φ est vraie lorsque les variables p et q sont simultanément vraies. Par conséquent, une forme normale disjonctive de longueur minimale de la proposition φ est donnée par

$$\neg r \vee (p \wedge q)$$

Notons que le caractère minimal de cette FND est assuré par le fait que nous avons considéré des rectangles de taille 2^n la plus grande possible pour prendre en compte tous les 1 de la table de Karnaugh.

(2) Soit a un paramètre réel strictement positif. Construire des ensembles infinis $A, B \subseteq \mathbb{R}$ pour que la fonction f définie par

$$f\colon A \to B,\ x \mapsto ax^2 - 2a(a+1)x + a^2(a+2)$$

soit bijective.

Solution : Puisque $a > 0$, il s'agit d'un polynôme du second degré dont le graphe correspond à une parabole convexe. Cette fonction n'est donc ni injective sur $\mathbb{R}$, ni surjective dans $\mathbb{R}$.

Le discriminant de l'expression $ax^2 - 2a(a+1)x + a^2(a+2)$ vaut

$$4a^2(a+1)^2 - 4a^3(a+2) = 4a^2(a^2+2a+1-a^2-2a) = 4a^2.$$

Il est donc toujours strictement positif ce qui implique que la fonction f possède 2 racines distinctes. Ces racines sont a et $a+2$. Il découle que l'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = a+1$. De plus, cette fonction possède un minimum en $a+1$ qui vaut $f(a+1) = -a$.

Quelques possibilités pour les ensembles A et B sont donc :

(a) $A = [a+1, +\infty[$ et $B = [-a, +\infty[$

(b) $A =]-\infty, a+1]$ et $B = [-a, +\infty[$

(c) $A = [a+1, a+2]$ et $B = [-a, 0]$

(3) Une maison d'édition doit envoyer 1000 exemplaires d'un ouvrage à l'Université de Liège. Pour l'emballage, les ouvrages sont répartis dans des caisses de deux formats différents, l'un permettant d'emballer 18 livres, l'autre 24.

(a) Montrer que la livraison ne peut se faire en remplissant intégralement toutes les caisses.

(b) Montrer qu'il est possible d'envoyer 996 exemplaires en utilisant uniquement des caisses pleines. Dans ce cas, déterminer le nombre de caisses de chaque format qu'il faut utiliser pour la livraison si on veut maximiser le nombre de caisses du format le plus grand.

Solution :

(a) Notons x le nombre de caisses contenant 18 livres et y le nombre de celles qui en contiennent 24. Le problème consiste alors à montrer qu'il n'existe aucun couple (x, y) d'entiers positifs vérifiant

$$18x + 24y = 1000, \qquad \text{ou encore} \quad 9x + 12y = 500$$

Comme pgcd(9,12) $= 3$ ne divise pas 500, on conclut directement que cette équation n'admet pas de couple de solutions entières.

(b) Avec les mêmes notations, le problème consiste à résoudre l'équation

$$18x + 24y = 996, \qquad \text{ou encore} \quad 3x + 4y = 166$$

Comme pgcd(3,4) $= 1$ divise 166, cette équation admet bien des solutions entières. On trouve par exemple directement la solution particulière $(x_0, y_0) = (-166, 166)$, et toutes les solutions de cette équation sont données par les couples de la forme

$$(-166 + 4k, 166 - 3k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vu le problème, il est clair que les solutions sont des couples d'entiers positifs et nous avons donc les contraintes

$$\begin{cases} -166 + 4k \geq 0 \\ 166 - 3k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{166}{4} \\ k \leq \frac{166}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \quad 42 \leq k \leq 55$$

Enfin, puisque l'on veut maximiser le nombre $y = 166-3k$ de caisses contenant 24 livres, il est clair qu'il faut prendre $k = 42$, autrement dit 40 caisses de 24 livres et 2 caisses de 18.

(4) (a) On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Les produits AB et BA sont-ils définis ? Justifier. Calculer le produit dans le(s) cas où c'est possible.

(b) Sous quelle(s) condition(s) sur le paramètre $a \in \mathbb{C}$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a & a \\ a & 1 & -a \\ -a & a & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Calculer alors son inverse.

Solution :

(a) Pour pouvoir multiplier deux matrices, il faut que le nombre de colonnes de la première matrice soit égal au nombre de lignes de la seconde. Ainsi, au vu des dimensions des matrices A et B, les produits AB et BA sont tous deux définis. De ce fait, on a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -38 \\ -2 & -46 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 5 & 20 & -10 \\ 0 & -45 & 9 \\ 2 & 13 & -5 \end{pmatrix}.$$

(b) Une matrice est inversible si son déterminant est non nul. De plus, on a

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ a & 1 & -a \\ -a & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ 0 & 1+a & -2a \\ 0 & 2a & 1-a \end{vmatrix} = 3a^2 + 1.$$

Ainsi, la matrice M est inversible si, et seulement si, $3a^2 + 1 \neq 0$. Cette dernière condition peut se réécrire

$$a^2 \neq -\frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; a^2 \neq \frac{i^2}{3} \;\Leftrightarrow\; a \neq \pm\frac{i}{\sqrt{3}} \;\Leftrightarrow\; a \neq \pm\frac{i\sqrt{3}}{3}.$$

La matrice M est donc inversible lorsque $a \neq \pm\frac{i\sqrt{3}}{3}$.

La matrice des cofacteurs de M est donnée par

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a^2+1 & a^2-a & a^2+a \\ a^2+a & a^2+1 & a^2-a \\ a^2-a & a^2+a & a^2+1 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de M est donc

$$M^{-1} = \frac{1}{3a^2+1} \begin{pmatrix} a^2+1 & a^2+a & a^2-a \\ a^2-a & a^2+1 & a^2+a \\ a^2+a & a^2-a & a^2+1 \end{pmatrix}.$$

(5) Discuter la compatibilité du système suivant dont les inconnues sont $x, y, z \in \mathbb{R}$ en fonction du paramètre réel α. Dans les cas où il n'est pas de Cramer, donner son ensemble de solutions.

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 2 \\ x + \alpha y + z = 2\alpha \\ x + y + \alpha z = \alpha + 1 \end{cases}$$

Solution : Ce système peut être réécrit sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\alpha \\ \alpha+1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice du système est donné par

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ \alpha+2 & \alpha & 1 \\ \alpha+2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix}$$

Ainsi, il vaut $(\alpha+2)(\alpha-1)^2$. Le système est donc de Cramer pour $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{1, -2\}$. On va donc s'intéresser aux cas $\alpha = 1$ et $\alpha = -2$.

(a) Cas $\alpha = 1$: Dans ce cas, le système devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et peut être simplifié et exprimé de manière équivalente à l'aide de l'unique équation $x + y + z = 2 \Leftrightarrow x = 2 - y - z$. Ainsi, l'ensemble des solutions du système est

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2-y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) Cas $\alpha = -2$: Dans ce cas, le système devient

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le rang de la matrice du système vaut 2 car $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. De plus, le rang de la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

vaut 3. En effet,

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$$

Le système est donc incompatible et son ensemble de solutions est $S = \emptyset$.

Mathématiques pour l'informatique 1
Correction de l'interrogation de novembre
Année académique 2020–2021

1)
Algorithme d'Euclide

Question 1. Détailler les calculs effectués à chaque étape de l'algorithme d'Euclide sur les entrées $a = 850$ et $b = 714$. Démontrer que le résultat obtenu est bien le PGCD de a et b en utilisant uniquement les calculs effectués.

Solution : Puisque $850 > 714$, on initialise la variable r à 850 et la variable s à 714. L'algorithme effectue successivement les divisions euclidiennes suivantes, et remplace les variables r et s à chaque étape en conséquence :

$$\begin{aligned} 850 &= 1 \cdot 714 + 136 \qquad & (r, s) &\leftarrow (714, 136) \\ 714 &= 5 \cdot 136 + 34 \qquad & (r, s) &\leftarrow (136, 34) \\ 136 &= 4 \cdot 34 + 0 \qquad & (r, s) &\leftarrow (34, 0) \end{aligned}$$

Puisque $s = 0$, la condition de la boucle "while" est violée et l'algotithme rend la valeur de r, c'est-à-dire 34.

Pour montrer que 34 est le PGCD de 850 et 714, on procède en deux étapes.

Premièrement, montrons que 34 est un diviseur commun de 850 et 714 en remontant les calculs effectués par l'algorithme. De la dernière égalité, on obtient que 34 divise 136. Sachant cela, on déduit de la deuxième égalité que 34 divise aussi 714. Enfin, puisque 34 divise 136 et 714, on déduit de la première égalité que 34 divise 850. On a donc bien vérifié que 34 divise à la fois 714 et 850.

Deuxièmement, montrons que 34 est plus grand que tout diviseur commun de 714 et 850 en descendant les calculs effectués par l'algorithme d'Euclide. Soit d un diviseur commun de 714 et 850. En réécrivant la première égalité sous la forme

$$136 = 850 - 1 \cdot 714$$

on obtient que d divise aussi 136. Puisque d divise à la fois 714 et 136, en réécrivant la première égalité sous la forme

$$34 = 714 - 5 \cdot 136$$

on obtient que d divise aussi 34. Ainsi, $34 \geq d$.

Question 2. (Variante 1 de la question 1). Détailler les calculs effectués à chaque étape de l'algorithme d'Euclide sur les entrées $a = 1275$ et $b = 1071$. Démontrer que le résultat obtenu est bien le PGCD de a et b en utilisant uniquement les calculs effectués.

Solution : Même raisonnement que pour la question 1.

Question 3. (Variante 2 de la question 1). Détailler les calculs effectués à chaque étape de l'algorithme d'Euclide sur les entrées $a = 750$ et $b = 630$. Démontrer que le résultat obtenu est bien le PGCD de a et b en utilisant uniquement les calculs effectués.

Solution : Même raisonnement que pour la question 1.

Question 4. (Variante 3 de la question 1). Détailler les calculs effectués à chaque étape de l'algorithme d'Euclide sur les entrées $a = 500$ et $b = 420$. Démontrer que le résultat obtenu est bien le PGCD de a et b en utilisant uniquement les calculs effectués.

Solution : Même raisonnement que pour la question 1.

Question 5. (Variante 4 de la question 1). Détailler les calculs effectués à chaque étape de l'algorithme d'Euclide sur les entrées $a = 832$ et $b = 546$. Démontrer que le résultat obtenu est bien le PGCD de a et b en utilisant uniquement les calculs effectués.

Solution : Même raisonnement que pour la question 1.

2)
Récurrence

Question 6. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.

Solution :
Procédons par récurrence.
Cas de base.
Pour n=0, on a

$$u_0 = 2 > n^2 = 0$$

et la propriété est donc vraie pour $n = 0$.
Cas de récurrence.
Supposons $u_n > n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et montrons que $u_{n+1} > (n+1)^2$: on a successivement

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2n + 5 && \text{(par définition de la suite)} \\ &> n^2 + 2n + 5 = (n+1)^2 + 4 && \text{(vu l'hypothèse de récurrence)} \\ &> (n+1)^2 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.
Conclusion. La propriété est vraie pour $n = 0$, donc vu le cas de récurrence pour n=1 ; étant vraie pour $n = 1$, elle l'est pour $n = 2$; et ainsi de suite, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 7. (Variante 1 de la question 6). On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2(n-1) + 7$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.

Solution :
Procédons par récurrence.
Cas de base.
Pour n=0, on a

$$u_0 = 2 > n^2 = 0$$

et la propriété est donc vraie pour $n = 0$.
Cas de récurrence.
Supposons $u_n > n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et montrons que $u_{n+1} > (n+1)^2$: on a successivement

$$\begin{aligned} u_{n+1} = u_n + 2(n-1) + 7 &= u_n + 2n + 5 && \text{(par définition de la suite)} \\ &> n^2 + 2n + 5 = (n+1)^2 + 4 && \text{(vu l'hypothèse de récurrence)} \\ &> (n+1)^2 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.
Conclusion. La propriété est vraie pour $n = 0$, donc vu le cas de récurrence pour n=1 ; étant vraie pour $n = 1$, elle l'est pour $n = 2$; et ainsi de suite, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 8. (Variante 2 de la question 6). On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = u_n + 3n + 5$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2 + n$.

Solution :
Procédons par récurrence.
Cas de base.
Pour n=0, on a

$$u_0 = 2 > n^2 + n = 0$$

et la propriété est donc vraie pour $n = 0$.
Cas de récurrence.
Supposons $u_n > n^2 + n$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et montrons que $u_{n+1} > (n + 1)^2 + n + 1$: on a successivement

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 3n + 5 && \text{(par définition de la suite)} \\ &> n^2 + n + 3n + 5 = (n + 1)^2 + 2n + 4 && \text{(vu l'hypothèse de récurrence)} \\ &> (n + 1)^2 + n + 1 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.
Conclusion. La propriété est vraie pour $n = 0$, donc vu le cas de récurrence pour n=1 ; étant vraie pour $n = 1$, elle l'est pour $n = 2$; et ainsi de suite, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 9. (Variante 3 de la question 6). On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2 + n$.

Solution :
Procédons par récurrence.
Cas de base.
Pour n=0, on a

$$u_0 = 2 > n^2 + n = 0$$

et la propriété est donc vraie pour $n = 0$.
Cas de récurrence.
Supposons $u_n > n^2 + n$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et montrons que $u_{n+1} > (n + 1)^2 + n + 1$: on a successivement

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2n + 5 && \text{(par définition de la suite)} \\ &> n^2 + n + 2n + 5 = (n + 1)^2 + n + 4 && \text{(vu l'hypothèse de récurrence)} \\ &> (n + 1)^2 + n + 1 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.
Conclusion. La propriété est vraie pour $n = 0$, donc vu le cas de récurrence pour n=1 ; étant vraie pour $n = 1$, elle l'est pour $n = 2$; et ainsi de suite, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 10. (Variante 4 de la question 6). On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = u_n + 3(n - 1) + 8$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2 + n$.

Solution :
Procédons par récurrence.
Cas de base.
Pour n=0, on a

$$u_0 = 2 > n^2 + n = 0$$

et la propriété est donc vraie pour $n = 0$.
Cas de récurrence.
Supposons $u_n > n^2 + n$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et montrons que $u_{n+1} > (n+1)^2 + n + 1$: on a successivement

$$\begin{aligned} u_{n+1} = u_n + 3(n-1) + 8 &= u_n + 3n + 5 && \text{(par définition de la suite)} \\ &> n^2 + n + 3n + 5 = (n+1)^2 + 2n + 4 && \text{(vu l'hypothèse de récurrence)} \\ &> (n+1)^2 + n + 1 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.
Conclusion. La propriété est vraie pour $n = 0$, donc vu le cas de récurrence pour n=1 ; étant vraie pour $n = 1$, elle l'est pour $n = 2$; et ainsi de suite, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3)

Signe sommatoire

Question 11. Permuter les sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=i+1}^{2i} (i + j).$$

Solution :

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq 5 \\ i + 1 \leq j \leq 2i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq i \\ i \leq 5 \\ i + 1 \leq j \\ j \leq 2i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq i \\ i \leq 5 \\ i \leq j - 1 \\ \lceil j/2 \rceil \leq i \\ 1 + 1 \leq j & \text{car } i \text{ est au min } 1 \\ j \leq 2 \times 5 & \text{car } i \text{ est au max } 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \max(1, \lceil j/2 \rceil) \leq i \\ i \leq \min(5, j-1) \\ 2 \leq j \\ j \leq 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lceil j/2 \rceil \leq i & \text{car } \lceil j/2 \rceil \geq 1 \quad \forall j \in \{2, \ldots 10\} \\ i \leq \min(5, j-1) \\ 2 \leq j \\ j \leq 10 \end{cases}$$

On a donc

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i+1}^{2i}(i+j)=\sum_{j=2}^{10}\sum_{i=\lceil j/2\rceil}^{\min(5,j-1)}(i+j).$$

Question 12. (Variante 1 de la question 11). Permuter les sommes suivantes :

$$\sum_{i=2}^{6}\sum_{j=i+2}^{2i}(i+j).$$

Solution : Même raisonnement que pour la question 11.

$$\sum_{i=2}^{6}\sum_{j=i+2}^{2i}(i+j)=\sum_{j=4}^{12}\sum_{i=\lceil j/2\rceil}^{\min(6,j-2)}(i+j).$$

Question 13. (Variante 2 de la question 11). Permuter les sommes suivantes :

$$\sum_{i=2}^{5}\sum_{j=i}^{2i-1}(i+j).$$

Solution : Même raisonnement que pour la question 11.

$$\sum_{i=2}^{5}\sum_{j=i}^{2i-1}(i+j)=\sum_{j=2}^{9}\sum_{i=\lceil (j+1)/2\rceil}^{\min(5,j)}(i+j).$$

Question 14. (Variante 3 de la question 11). Permuter les sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i}^{2i+1}(i+j).$$

Solution : Même raisonnement que pour la question 11.

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i}^{2i+1}(i+j)=\sum_{j=1}^{11}\sum_{i=\max(\lceil (j-1)/2\rceil,1)}^{\min(5,j)}(i+j).$$

Question 15. (Variante 4 de la question 11). Permuter les sommes suivantes :

$$\sum_{i=2}^{7}\sum_{j=i-1}^{2i}(i+j).$$

Solution : Même raisonnement que pour la question 11.

$$\sum_{i=2}^{7}\sum_{j=i-1}^{2i}(i+j)=\sum_{j=1}^{14}\sum_{i=\max(\lceil j/2\rceil,2)}^{\min(7,j+1)}(i+j).$$

4) Logique

Question 16. Trois collègues Albert, Bernard et Charles déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si Albert commande un dessert, Bernard en commande un aussi.
2. Chaque jour, soit Bernard, soit Charles, mais pas les deux, commandent un dessert.
3. Albert ou Charles, ou les deux commandent chaque jour un dessert.

Résumer avec une forme normale conjonctive de longueur minimale ces informations. Exprimer ce résumé en français.

Solution : Les 3 propositions peuvent s'écrire de la façon suivante :

1. $A \Rightarrow B$
2. $(B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg B)$ ou alors $(B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C)$
3. $A \vee C$

Il est donc nécessaire de trouver une forme normale conjonctive de longueur minimale pour la proposition

$$\phi \equiv (A \Rightarrow B) \wedge ((B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg B)) \wedge (A \vee C).$$

Pour trouver cette FNC de longueur minimale, il faut utiliser la table de Karnaugh. Mais avant, pour pouvoir créer cette table, il est nécessaire de connaitre la table de vérité de ϕ. Voici cette table :

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$(B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg B)$	$A \vee C$	ϕ
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0

A partir de cette table de vérité, construisons la table de Karnaugh pour $\neg\phi$. Il faut en effet créer la table de Karnaugh pour $\neg\phi$ et non celle pour ϕ pour obtenir une FNC pour ϕ.

$\neg\phi$		(B, C)			
		(0,0)	(0,1)	(1,1)	(1,0)
A	0	1	0	1	1
	1	1	1	1	0

Il n'est possible de faire que des rectangles de taille 2. Il y a cependant 2 façons de faire ces rectangles. La première façon permet d'obtenir

$$\neg\phi \equiv (\neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

La FNC de longueur minimale pour ϕ est donc

$$\phi \equiv (B \vee C) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg C).$$

La deuxième façon permet d'obtenir

$$\neg\phi \equiv (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B).$$

La FNC de longueur minimale pour ϕ est donc

$$\phi \equiv (A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B).$$

Finalement, pour exprimer en français le résumé des 3 propositions de départ, il suffit de remarquer que dans la table de vérité, il n'y a que 2 lignes qui rendent ϕ vrai. Ainsi, ϕ est vrai si

1. Albert et Bernard commandent un dessert alors que Charles n'en commande pas ; ou
2. Albert et Bernard ne commandent pas de dessert alors que Charles en commande un.

Question 17. (Variante 1 de la question 16). Trois collègues Albert, Bernard et Charles déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si Bernard commande un dessert, Charles en commande un aussi.
2. Chaque jour, soit Charles, soit Albert, mais pas les deux, commandent un dessert.
3. Bernard ou Albert, ou les deux commandent chaque jour un dessert.

Résumer avec une forme normale conjonctive de longueur minimale ces informations. Exprimer ce résumé en français.

Solution : Même raisonnement que pour la question 16 en effectuant les changement de noms suivants :

Question 16	$\curvearrowright$	Cette question
Albert	$\curvearrowright$	Bernard
Bernard	$\curvearrowright$	Charles
Charles	$\curvearrowright$	Albert

Question 18. (Variante 2 de la question 16). Trois collègues Albert, Bernard et Charles déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si Charles commande un dessert, Albert en commande un aussi.
2. Chaque jour, soit Albert, soit Bernard, mais pas les deux, commandent un dessert.
3. Charles ou Bernard, ou les deux commandent chaque jour un dessert.

Résumer avec une forme normale conjonctive de longueur minimale ces informations. Exprimer ce résumé en français.

Solution : Même raisonnement que pour la question 16 en effectuant les changement de noms suivants :

Question 16	$\curvearrowright$	Cette question
Albert	$\curvearrowright$	Charles
Bernard	$\curvearrowright$	Albert
Charles	$\curvearrowright$	Bernard

Question 19. (Variante 3 de la question 16). Trois collègues Albert, Bernard et Charles déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si Albert commande un dessert, Charles en commande un aussi.
2. Chaque jour, soit Charles, soit Bernard, mais pas les deux, commandent un dessert.
3. Albert ou Bernard, ou les deux commandent chaque jour un dessert.

Résumer avec une forme normale conjonctive de longueur minimale ces informations. Exprimer ce résumé en français.

Solution : Même raisonnement que pour la question 16 en effectuant les changement de noms suivants :

Question 16	$\curvearrowright$	Cette question
Albert	$\curvearrowright$	Albert
Bernard	$\curvearrowright$	Charles
Charles	$\curvearrowright$	Bernard

Question 20. (Variante 4 de la question 6). Trois collègues Albert, Bernard et Charles déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si Bernard commande un dessert, Albert en commande un aussi.
2. Chaque jour, soit Albert, soit Charles, mais pas les deux, commandent un dessert.
3. Bernard ou Charles, ou les deux commandent chaque jour un dessert.

Résumer avec une forme normale conjonctive de longueur minimale ces informations. Exprimer ce résumé en français.

Solution : Même raisonnement que pour la question 16 en effectuant les changement de noms suivants :

Question 16	$\curvearrowright$	Cette question
Albert	$\curvearrowright$	Bernard
Bernard	$\curvearrowright$	Albert
Charles	$\curvearrowright$	Charles

5)

Ensembles

Question 21. Soit E un ensemble et soit $f : E \to E$. Démontrer que la fonction f est injective si et seulement si

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \ : \ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Solution : Pour démontrer l'équivalence

$$f \text{ injectif} \quad \Leftrightarrow \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(E) \ : \ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

procédons par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons d'abord que f soit injectif.
Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Démontrons l'égalité attendue par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in f(A \cap B)$. Par définition, il existe $x \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$. De là, puisque

- $x \in A$, il en résulte que $f(x) = y \in f(A)$,
- $x \in B$, il en résulte que $f(x) = y \in f(B)$,

il s'ensuit que $y \in f(A) \cap f(B)$. Ainsi, vu le choix arbitraire de y, on conclut que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors,

- $y \in f(A)$, et il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$,
- $y \in f(B)$, et il existe $x' \in B$ tel que $f(x') = y$.

On a donc $f(x) = y = f(x')$ et, vu que la fonction f est injective, il en résulte que $x = x'$ et donc que $x \in A \cap B$, ce qui entraîne finalement que $y = f(x) \in f(A \cap B)$.

Vu le choix arbitraire de y, on a donc bien $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

En conséquence, vu le choix arbitraire de $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(E).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons que

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(E)$$

et montrons que f est injectif.
Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. En prenant les parties $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$ de E, il vient

$$f(A) = f(\{x\}) = \{f(x)\} \quad \text{et} \quad f(B) = f(\{y\}) = \{f(y)\} = \{f(x)\} = f(A)$$

de sorte que

$$f(A) \cap f(B) = f(A) \cap f(A) = f(A) = f(\{x\}) = f(A \cap B)$$

où la dernière égalité découle de la supposition de départ. Ceci entraîne alors successivement

$$x \in A \cap B \quad \Rightarrow \quad x \in B = \{y\} \quad \Rightarrow \quad x = y$$

ce qui permet de conclure que f est bien injectif.

Question 22. (Variante 1 de la question 21). Soit E un ensemble et soit $f : E \to E$. Démontrer que la fonction f est injective si et seulement si

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \; : \; (A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset)\,.$$

<u>Solution</u> : Pour démontrer l'équivalence

$$f \text{ injectif} \quad \Leftrightarrow \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(E) \; : \; (A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset)\,.$$

procédons par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons d'abord que f soit injectif et montrons que

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \; : \; (A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset)\,.$$

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
Procédons par l'absurde et supposons $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$. Alors, $\exists y \in f(A) \cap f(B)$ et
- $y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \; : \; f(x) = y$,
- $y \in f(B) \Rightarrow \exists x' \in B \; : \; f(x') = y$.

On a donc $f(x) = y = f(x')$ et, vu que la fonction f est injective, il en résulte que $x = x'$ et donc que $x \in A \cap B$, ce qui est absurde puisque $A \cap B = \emptyset$.
La supposition était donc fausse et $f(A) \cap f(B) = \emptyset$, ce qui permet de conclure vu le choix arbitraire de A et B.
$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons que

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \; : \; (A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset)\,.$$

et montrons que f est injectif.
Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. En prenant les parties $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$ de E, il vient

$$f(A) = f(\{x\}) = \{f(x)\} \quad \text{et} \quad f(B) = f(\{y\}) = \{f(y)\} = \{f(x)\} = f(A)$$

de sorte que

$$f(A) \cap f(B) = f(A) = \{f(x)\} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad A \cap B \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad x = y$$

où la première implication découle de la supposition de départ (par contraposition). On en conclut donc que f est bien injectif.

Question 23. (Variante 2 de la question 21). Soit E un ensemble et soit $f : E \to E$. Démontrer que la fonction f est injective si et seulement si

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \; : \; (A \subseteq B \Rightarrow f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A))\,.$$

<u>Solution</u> : Pour démontrer l'équivalence

$$f \text{ injectif} \quad \Leftrightarrow \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(E) \; : \; (A \subseteq B \Rightarrow f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A))\,.$$

procédons par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons d'abord que f soit injectif et montrons que

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \ : \ (A \subseteq B \Rightarrow f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)) \, .$$

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \subseteq B$.
Démontrons l'égalité attendue par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in f(B \setminus A)$. Par définition, il existe $x \in B \setminus A$ tel que $f(x) = y$. De là, puisque $x \in B$, il en résulte que $f(x) = y \in f(B)$.
Procédons alors par l'absurde et supposons que $y \in f(A)$: dans ce cas, il existe $x' \in A$ tel que $f(x') = y = f(x)$, ce qui entraîne $x = x'$ par injectivité de f ; auquel cas $x = x' \in A$, ce qui est absurde ! La supposition était donc fausse et $y \notin f(A)$.
Ainsi, $y \in f(B) \setminus f(A)$ et l'inclusion est vérifiée.

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in f(B) \setminus f(A)$. Alors,
- $y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \ : \ f(x) = y$,
- $y \notin f(A) \Rightarrow x \notin A$ (sinon, $f(x) = y \in f(A)$),

c'est-à-dire $x \in B \setminus A$, ce qui entraîne que $f(x) = y \in f(B \setminus A)$, de sorte que $f(B) \setminus f(A) \subset f(B \setminus A)$ (vu le choix arbitraire de y).

En conséquence, vu le choix arbitraire de $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a

$$(A \subseteq B \Rightarrow f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)) \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(E).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons que

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \ : \ (A \subseteq B \Rightarrow f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)) \, .$$

et montrons que f est injectif.
Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. En prenant les parties $A = \{x\}$ et $B = \{x, y\}$ de E, on a $A \subseteq B$ et

$$f(B) \setminus f(A) = f(\{x, y\}) \setminus f(\{x\}) = \{f(x), f(y)\} \setminus \{f(x)\} = \emptyset$$

puisque $f(x) = f(y)$. Dès lors, vu l'hypothèse de départ, il vient

$$f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A) = \emptyset$$

Supposons alors (par l'absurde) que $x \neq y$: dans ce cas, $y \in B \setminus A$ et $f(y) \in f(B \setminus A)$, ce qui contredit l'égalité ci-dessus. Cette supposition est donc fausse et $x = y$. On en conclut donc que f est bien injectif.

Question 24. (Variante 3 de la question 21). Soit E un ensemble et soit $f : E \to E$. Démontrer que la fonction f est injective si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \ : \ f(E \setminus A) \subseteq E \setminus f(A).$$

<u>Solution</u> : Pour démontrer l'équivalence

$$f \text{ injectif} \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathcal{P}(E) \ : \ f(E \setminus A) \subseteq E \setminus f(A).$$

procédons par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons d'abord que f soit injectif et montrons que

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \ : \ f(E \setminus A) \subseteq E \setminus f(A).$$

Soient $A \in \mathcal{P}(E)$ et $y \in f(E \setminus A)$.
Par définition, il existe $x \in E \setminus A$ tel que $f(x) = y$. Par définition de f, qui est à valeur dans E, il est clair que $y = f(x) \in E$.
Supposons alors par l'absurde que $y \in f(A)$: dans ce cas, il existe $x' \in A$ tel que $f(x') = y = f(x)$ et l'injectivité de f entraîne que $x = x'$, de sorte que $x \in A$, ce qui est absurde (vu que $x \in E \setminus A$) ! La supposition était donc fausse et $y \notin f(A)$, ce qui permet d'affirmer finalement que $y \in E \setminus f(A)$.

Vu le choix arbitraire de y, on conclut que $f(E \setminus A) \subseteq E \setminus f(A)$, et vu le choix arbitraire de A, cette inclusion est vérifiée $\forall A \in \mathcal{P}(E)$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons que

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \;:\; f(E \setminus A) \subseteq E \setminus f(A).$$

et montrons que f est injectif.
Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. En prenant la partie $A = \{x\}$ de E, on a (vu la supposition)

$$f(E \setminus A) \subseteq E \setminus f(A) = E \setminus f(\{x\}) = E \setminus \{f(x)\} = E \setminus \{f(y)\}$$

Supposons alors (par l'absurde) que $x \neq y$: dans ce cas, $y \in E \setminus A$ et $f(y) \in f(E \setminus A) \subseteq E \setminus \{f(y)\}$, ce qui est absurde ! La supposition était donc fausse et $x = y$. On en conclut donc que f est bien injectif.

Question 25. (Variante 4 de la question 21). Soit E un ensemble et soit $f : E \to E$. Démontrer que la fonction f est injective si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \;:\; f^{-1}(f(A)) = A.$$

<u>Solution</u> : Pour démontrer l'équivalence

$$f \text{ injectif} \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathcal{P}(E) \;:\; f^{-1}(f(A)) = A.$$

procédons par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons d'abord que f soit injectif et montrons que

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \;:\; f^{-1}(f(A)) = A.$$

Soient $A \in \mathcal{P}(E)$.
Démontrons l'égalité attendue par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Par définition, cela signifie que $f(x) \in f(A)$ et donc, il existe $x' \in A$ tel que $f(x') = f(x)$. La fonction f étant injective, on en déduit alors que $x = x'$, de sorte que $x = x' \in A$. Par conséquent, $f^{-1}(f(A)) \subset A$ vu le choix arbitraire de x.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in A$. Dans ce cas, $f(x) \in f(A)$ et

$$x \in \{x \in E \;:\; f(x) \in f(A)\} = f^{-1}(f(A)).$$

ce qui permet de conclure que $A \subset f^{-1}(f(A))$ (vu le choix arbitraire de x).

Vu le choix arbitraire de $A \in \mathcal{P}(E)$, on conclut finalement que

$$f^{-1}(f(A)) = A \quad \forall A \in \mathcal{P}(E).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons que

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \;:\; f^{-1}(f(A)) = A.$$

et montrons que f est injectif.
Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$.
En prenant les parties $A = \{x\}$ et $A' = \{y\}$ de E, il vient

$$f(A) = f(\{x\}) = \{f(x)\} \quad \text{et} \quad f(A') = f(\{y\}) = \{f(y)\} = \{f(x)\} = f(A).$$

De là,

$$f(A) = f(A') \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(A')) \quad \Rightarrow \quad A = A' \quad \Rightarrow \quad x = y$$

où la seconde implication découle de la supposition de départ. On en conclut donc que f est bien injectif.

Examen de Mathématiques pour l'informatique 1

Correctif

13 janvier 2021

Consignes générales

— La durée de l'examen est de 2h30.

— Répondre uniquement sur les feuilles fournies.

— Les feuilles rendues doivent être numérotées et comporter chacune vos nom et prénom.

— Répondre à la théorie en un seul tenant.

— Répondre à chaque exercice sur une feuille séparée.

— Calculatrices (ou équivalents) non autorisées.

1. Théorie

(1) En logique propositionnelle, qu'appelle-t-on une contradiction ? Comment qualifie-t-on une proposition qui n'est pas une contradiction. Donner des exemples de ces deux types de propositions contenant chacun trois variables propositionnelles.

(2) Qu'est-ce qu'une surjection ? Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des surjections ?

(a) $f\colon \{-1,0,1\} \to \{0,1\},\ x \mapsto x^2$

(b) $f\colon \{-1,0,1\} \to \{-1,0,1\},\ x \mapsto x^3$

(c) $f\colon \{-1,0,1\} \to \{-1,0,1\},\ x \mapsto x^2$

(d) $f\colon \{-1,0,1\} \to \{0,1\},\ x \mapsto x^3$

(3) (a) Définir la notion d'ensemble dénombrable. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est-il dénombrable ? Justifier votre réponse.

(b) Définir le produit cartésien $A \times B$ de deux ensembles A et B.

(c) Sachant que les ensembles A et B sont dénombrables et que le produit cartésien $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, démontrer que le produit cartésien $A \times B$ est aussi dénombrable.

(4) Démontrer que le produit matriciel est associatif.

2. Exercices

(1) Construire une table de Karnaugh valide pour la proposition φ dont la table de vérité est détaillée ci-dessous et en déduire une forme normale disjonctive de longueur minimale pour φ.

p	q	r	φ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Solution : Une table de Karnaugh de φ est donnée par

φ		(p, q)			
		(0,0)	(0,1)	(1,1)	(1,0)
(r)	0	0	1	1	0
	1	1	0	1	1

Sur la première ligne, on peut former un rectangle de 1 de taille 2 (notons que le premier 1 de cette ligne ne peut faire partie d'aucun autre rectangle : il n'y a donc pas de choix possible !), selon lequel la proposition φ est vraie lorsque $q \wedge \neg r$ l'est.

Sur la seconde ligne, le premier 1 ne peut être raccroché qu'à celui au bout de cette même ligne (là encore, aucun autre choix possible !), ce qui donne un rectangle de taille 2 selon lequel la proposition φ est vraie lorsque $\neg q \wedge r$ l'est.

A ce stade, un seul 1 n'a pas encore été pris en compte, mais nous pouvons former un rectangle de taille deux avec ce dernier, et il y a deux choix possibles (un seul suffit évidemment) puisque ce dernier 1 est voisin de deux autres :

- en le joignant à celui situé juste au-dessus, le rectangle obtenu mène à la proposition $p \wedge q$, de sorte qu'une forme normale disjonctive de longueur minimale de la proposition φ est donnée par

$$(q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r) \vee (p \wedge q)$$

- en le joignant à celui situé à droite, le rectangle obtenu mène à la proposition $p \wedge r$, , de sorte qu'une forme normale disjonctive de longueur minimale de la proposition φ est donnée par

$$(q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r) \vee (p \wedge r)$$

Notons que le caractère minimal de cette FND est assuré par le fait que nous avons considéré des rectangles de taille 2^n la plus grande possible pour prendre en compte tous les 1 de la table de Karnaugh. Si le dernier 1 avait été considéré seul (rectangle de taille 1), la dernière proposition de la FND aurait contenu les 3 variables et aurait donc été plus longue !

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on note

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 \qquad \text{et} \qquad S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a $T_n = (-1)^n S_n$.

Solution :

— Cas de base : $n = 1$

On a

$$T_1 = \sum_{k=1}^{1} (-1)^k k^2 = (-1)^1 \cdot 1^2 = -1$$

et

$$S_1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

Ce qui donne bien $T_1 = (-1)^1 S_1 = (-1) S_1 = -1$. Le cas de base est donc vérifié.

— Induction :

Supposons que $T_n = (-1)^n S_n$ et montrons que $T_{n+1} = (-1)^{n+1} S_{n+1}$. On a

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&= (-1)^n S_n + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \quad \text{Par hypothèse de récurrence} \\
&= (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&= (-1)^{n+1}(n+1)\left((n+1) - \frac{n}{2}\right) \\
&= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= (-1)^{n+1} S_{n+1}.
\end{aligned}$$

Grâce à l'induction, comme la propriété est vraie pour $n = 1$, elle est vraie aussi pour $n = 2$, et ainsi de suite. Donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

(3) (a) Les nombres 51 et 64 sont-ils inversibles dans $\mathbb{Z}_{81}$? Justifier. Pour chacun, s'il existe, donner son inverse.

(b) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{Z}_{12}$:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 5x - 2y = 3 \end{cases}$$

Solution :

(a) Un nombre n est inversible dans $\mathbb{Z}_{81}$ s'il est premier avec 81.

On a $\operatorname{pgcd}(51, 81) = 3$, donc 51 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}_{81}$. Le pgcd entre ces deux nombres est obtenu à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 81 &= 1 \cdot 51 + 30 \\ 51 &= 1 \cdot 30 + 21 \\ 30 &= 1 \cdot 21 + 9 \\ 21 &= 2 \cdot 9 + 3 \\ 9 &= 3 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

On peut aussi trouver le pgcd entre 64 et 81 par l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 81 &= 1 \cdot 64 + 17 \\ 64 &= 3 \cdot 17 + 13 \\ 17 &= 1 \cdot 13 + 4 \\ 13 &= 3 \cdot 4 + 1 \\ 4 &= 4 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{pgcd}(64, 81) = 1$, donc 64 et 81 sont premiers entre eux. Le nombre 64 est donc inversible dans $\mathbb{Z}_{81}$. Pour trouver son inverse, il suffit d'utiliser Euclide étendu :

$$\begin{aligned} 1 &= 13 - 3 \cdot 4 \\ &= 13 - 3 \cdot (17 - 1 \cdot 13) \\ &= 4 \cdot 13 - 3 \cdot 17 \\ &= 4 \cdot (64 - 3 \cdot 17) - 3 \cdot 17 \\ &= 4 \cdot 64 - 15 \cdot 17 \\ &= 4 \cdot 64 - 15 \cdot (81 - 1 \cdot 64) \\ &= 19 \cdot 64 - 15 \cdot 81 \end{aligned}$$

L'inverse de 64 dans $\mathbb{Z}_{81}$ est alors $\operatorname{Mod}(19, 81) = 19$.

(b) Le seul coefficient de l'équation qui est inversible dans $\mathbb{Z}_{12}$ est 5 et son inverse est 5. En effet, $5 \cdot 5 = 25 = 2 \cdot 12 + 1$. En multipliant la deuxième équation par 5, on obtient donc

$$\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ x - 10y = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(3 + 10y) + 4y = 9 \\ x = 3 + 10y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 + 10y = 9 \\ x = 3 + 10y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 0 \\ x = 3 + 10y \end{cases}$$

Or, 10 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}_{12}$ car $\text{pgcd}(10, 12) = 2$. Ainsi, le système devient

$$\begin{cases} \exists q \in \mathbb{Z} : 10y = 12q \\ x = 3 + 10y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists q \in \mathbb{Z} : 5y = 6q \\ x = 3 + 10y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \quad \text{ou} \quad y = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Les solutions du système sont donc $S = \{(3, 0), (3, 6)\}$.

(4) (a) Montrer que la matrice A est inversible et donner son inverse, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Résoudre, en utilisant le point précédent, le système suivant :

$$\begin{cases} 2y + 4z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 4 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

<u>Solution :</u>

(a) Comme la matrice A est une matrice 3×3, il est facile de calculer le déterminant de A par la méthode de Sarrus. On a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 4 - 4 - 12 + 8 = -4.$$

Comme le déterminant de A est non nul, la matrice est inversible. Son inverse est donnée par

$$A^{-1} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 10 & -4 & -8 \\ 6 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 1 & 2 \\ -3/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

(b) Comme, au vu du point (a), la matrice des coefficients du système est de déterminant non nul, le système est de Cramer. La solution du système est alors directement donnée par $x = A^{-1}b$, c'est-à-dire,

$$x = \begin{pmatrix} -5/2 & 1 & 2 \\ -3/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La solution du système est donc $S = \{(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -1)\}$.

(5) Discuter le rang et la compatibilité du système suivant, dont les inconnues sont $x, y, z \in \mathbb{R}$, en fonction du paramètre réel α. Dans les cas où il n'est pas de Cramer, donner son ensemble de solutions.

$$\begin{cases} x + \alpha y + (\alpha - 1)z = 0 \\ x + \alpha y + \alpha(\alpha - 1)z = 0 \\ (\alpha - 1)x + \alpha y + \alpha z = \alpha \end{cases}$$

Solution : Ce système peut être réécrit sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha - 1 \\ 1 & \alpha & \alpha(\alpha - 1) \\ \alpha - 1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice du système est donné par

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha - 1 \\ 1 & \alpha & \alpha(\alpha - 1) \\ \alpha - 1 & \alpha & \alpha \end{vmatrix} &= \alpha\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha - 1 \\ 1 & 1 & \alpha(\alpha - 1) \\ \alpha - 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix} 0 & 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 1 & \alpha(\alpha - 1) \\ \alpha - 2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \\ &= \alpha(\alpha - 2)\begin{vmatrix} 1 & \alpha - 1 \\ 1 & \alpha(\alpha - 1) \end{vmatrix} = \alpha(\alpha - 2)\left[\alpha(\alpha - 1) - (\alpha - 1)\right] \\ &= \alpha(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2\end{aligned}$$

Ainsi, le système est de rang 3, et donc de Cramer, pour $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, 2\}$. On va donc s'intéresser aux cas où $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

- Cas où $\alpha = 0$: Dans ce cas, le système devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice vaut 2 puisque les deux premières lignes sont linéairement indépendantes (non multiples ; on peut aussi extraire de cette matrice un mineur d'ordre 2 non nul) et que la troisième est multiple de la deuxième. Et comme tous les termes indépendants sont nuls, le rang de la matrice augmentée est le même, de sorte que le système est compatible. De plus, vu que le système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l} x - z = 0 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

l'ensemble des solutions du système est

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$$

- Cas où $\alpha = 1$: Dans ce cas, le système devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice vaut 2 puisque les deux dernières lignes sont linéairement indépendantes (non multiples ; on peut aussi extraire de cette matrice un mineur d'ordre 2 non nul) et que la première est égale à la deuxième. En outre, le rang de la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vaut également 2 pour les mêmes raisons [1]. Comme le système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 0 \\ y + z = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -y \\ z = 1 - y \end{array}\right.$$

l'ensemble des solutions du système est

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 1 - y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$$

- Cas où $\alpha = 2$: Dans ce cas, le système devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. On peut aussi remarquer que <u>tous</u> les mineurs d'ordre 3 sont nuls, mais il faut alors les calculer tous les trois !

Le rang de la matrice vaut 2 puisque les deux premières lignes sont linéairement indépendantes (non multiples ; on peut aussi extraire de cette matrice un mineur d'ordre 2 non nul) et que la dernière est égale à la deuxième. Par contre, le rang de la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

vaut 3 car on peut en extraire un mineur d'ordre 3 non nul, comme par exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Comme les rangs sont différents, le système est incompatible et son ensemble de solutions est $S = \emptyset$.

Examen de Mathématiques pour l'informatique 1

17 juin 2021 - correctif

Consignes générales

- La durée de l'examen est de 2h30.
- Répondre uniquement sur les feuilles fournies.
- Les feuilles rendues doivent être numérotées et comporter chacune vos nom et prénom.
- Répondre à la théorie en un seul tenant.
- Répondre à chaque exercice sur une feuille séparée.
- Calculatrices (ou équivalents) non autorisées.

1. Théorie

(1) Sur quelles équivalences logiques se basent les techniques de démonstration par contraposition et par disjonction des cas ?

(2) Donner un code de Gray pour les entiers de 0 à 31.

(3) Soient A, B, C des ensembles. Démontrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(4) Qu'est-ce qu'un système de Cramer ? Démontrer qu'un tel système admet exactement une solution.

(5) Démontrer que toute matrice carrée inversible a un déterminant non nul.

2. Exercices

(1) Construire une table de Karnaugh pour la proposition φ dont la table de vérité est détaillée ci-dessous et en déduire une forme normale conjonctive de longueur minimale pour φ.

a	b	c	d	φ
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	1	0	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	0	0	0

a	b	c	d	φ
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	0	0	0

Solution : Une table de Karnaugh de la proposition $\neg\varphi$ est donnée par

$\neg\varphi$		(c,d)			
		(0,0)	(0,1)	(1,1)	(1,0)
(a,b)	(0,0)	0	1	1	0
	(0,1)	1	0	0	1
	(1,1)	0	0	0	0
	(1,0)	1	1	1	1

Sur la dernière ligne, on peut former un rectangle de 1 de taille 4, selon lequel la proposition $\neg\varphi$ est vraie lorsque $a \wedge \neg b$ l'est.

En tenant compte des deux éléments centraux sur les première et dernière lignes, on peut encore former un rectangle de taille 4, selon lequel la proposition $\neg\varphi$ est vraie lorsque $\neg b \wedge d$ l'est.

Enfin, les deux 1 qui n'ont pas encore été considérés forment quant à eux un rectangle de taille 2 duquel on tire la véracité de $\neg\varphi$ lorsque $\neg a \wedge b \wedge \neg d$ est vraie.

Ayant ainsi considéré tous les 1 via les plus grands rectangles de taille 2^n possibles, nous sommes assurés qu'une forme normale disjonctive de longueur minimale de la proposition $\neg\varphi$ est

$$(a \wedge \neg b) \vee (\neg b \wedge d) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg d)$$

de sorte qu'une forme normale conjonctive de la proposition φ est donnée par

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv \neg(\neg\varphi)\\ &\equiv \neg(a \wedge \neg b) \wedge \neg(\neg b \wedge d) \wedge \neg(\neg a \wedge b \wedge \neg d)\\ &\equiv (\neg a \vee b) \wedge (b \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee d).\end{aligned}$$

(2) (a) Démontrer que les nombres $6n+1$ et $18n^2+6n+1$ sont premiers entre eux pour tout entier $n \geq 1$.

(b) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{Z}_{24}$.

$$\begin{cases} 16x - 12y = 8 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$$

Solution :

(a) Utilisons l'algorithme d'Euclide afin de déterminer le pgcd de ces deux nombres : pour tout $n \geq 1$, il vient [1]

$$\begin{aligned}18n^2+6n+1 &= 3n\cdot(6n+1)+(3n+1)\\ 6n+1 &= 1\cdot(3n+1)+3n\\ 3n+1 &= 1\cdot 3n+1\\ 3n &= 3n\cdot 1+0\end{aligned}$$

de sorte que le pgcd des nombres $6n+1$ et $18n^2+6n+1$, qui correspond au dernier reste non nul, vaut bien 1 quel que soit $n \geq 1$, ce qui par définition signifie qu'ils sont premiers entre eux quel que soit $n \geq 1$.

(b) Puisque 5 est le seul coefficient du système qui soit premier avec 24, il est le seul à être inversible [2] dans $\mathbb{Z}_{24}$. Son inverse est 5 : en effet, $5\cdot 5 = 25 = 1\cdot 24+1$. La seconde équation équivaut donc successivement à

$$5y = -3x \Leftrightarrow 5\cdot 5y = 5\cdot(-3)x \Leftrightarrow y = \mathrm{MOD}(-15,24)x \Leftrightarrow y = 9x$$

1. Rappelons que, lors d'une division euclidienne, le reste est strictement inférieur au diviseur, ce qui est à chaque fois vérifié ici puisque $3n+1 < 6n+1$, $3n < 3n+1$ et $1 < 3n$ quel que soit $n \geq 1$.

2. Attention : puisque 4 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}_{24}$, on ne peut pas diviser les 2 membres de la première équation par 4 ! !

En injectant ce résultat dans la première équation, on obtient alors successivement

$$\begin{aligned} 16x - 12 \cdot 9x = 8 &\iff \mathrm{MOD}(16-108, 24)x = 8 \\ &\iff 4x = 8 \\ &\iff \exists q \in \mathbb{Z} \; : \; 4x = 24q + 8 \\ &\iff \exists q \in \mathbb{Z} \; : \; x = 6q + 2 \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{Z}_{24}$, les valeurs acceptables pour x sont donc 2 ($q = 0$), 8 ($q = 1$), 14 ($q = 2$) et 20 ($q = 3$), qui mènent respectivement à $y = 18$, $y = \mathrm{MOD}(72, 24) = 0$, $y = \mathrm{MOD}(126, 24) = 6$ et $y = \mathrm{MOD}(180, 24) = 12$, si bien que l'ensemble des solutions du système est

$$S = \{(2, 18),\ (8, 0),\ (14, 6),\ (20, 12)\}.$$

(3) (a) Soit la fonction

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 + x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

(i) Déterminer les ensembles $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{-1\})$ et $f^{-1}([1, 2])$.

(ii) La fonction f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Justifier.

NB : Pour une fonction $f\colon A \to B$ et des ensembles $A' \subseteq A$ et $B' \subseteq B$, on a $f(A') = \{f(a) \colon a \in A'\}$ et $f^{-1}(B') = \{a \in A \colon f(a) \in B'\}$.

(b) Montrer que la fonction

$$g\colon \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{2}\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x \mapsto \frac{9}{2x - 1}$$

est une bijection et déterminer sa réciproque.

Solution :

(a) (i) On a

- $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$ car pour tout nombre négatif, son image par la fonction f sera 1 et pour tout nombre positif ou nul, son image par la fonction f sera comprise dans $[1, +\infty[$.
- $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ car il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.
- $f^{-1}(\{1\}) =]-\infty, 0]$ car pour tout nombre négatif, son image par la fonction f sera 1 et $f(0) = 1$.
- $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$ car il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -1$.
- $f^{-1}([1, 2]) =]-\infty, 1]$ car pour tout nombre négatif, son image par la fonction f sera 1 et pour tout réel compris dans $[0, 1]$, son image par la fonction f sera comprise dans $[1, 2]$.

(ii) La fonction f n'est pas injective car il existe deux réels qui ont la même image : $f(-1) = f(-2) = 1$.
La fonction f n'est pas surjective car il existe un réel y qui n'est l'image d'aucun réel x : il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -1$. Une autre justification est de dire que l'ensemble image de la fonction est $[1, +\infty[$ qui n'est pas égal à l'ensemble d'arrivée de la fonction f qui est $\mathbb{R}$.

(b) Pour montrer que la fonction g est une bijection, il faut montrer qu'elle est injective et surjective.
La fonction g est injective si pour $x \neq x'$ appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ on a $g(x) \neq g(x')$. Procédons par contraposée. Soient $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ tels que $g(x) = g(x')$, on a

$$\begin{aligned} g(x) = g(x') &\iff \frac{9}{2x-1} = \frac{9}{2x'-1} \\ &\iff x - 1 = 2x' - 1 \\ &\iff 2x = 2x' \\ &\iff x = x'. \end{aligned}$$

Donc la fonction g est injective.
La fonction g est surjective si pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ tel que $y = g(x)$. On a

$$\begin{aligned} y = g(x) &\iff y = \frac{9}{2x-1} \\ &\iff y(2x-1) = 9 \\ &\iff 2xy - y = 9 \\ &\iff x = \frac{9+y}{2y}. \end{aligned}$$

Il reste à prouver que $x = \dfrac{9+y}{2y} \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. On a

$$\frac{9+y}{2y} = \frac{1}{2} \iff 9 + y = y \iff 9 = 0$$

ce qui est impossible donc $x = \dfrac{9+y}{2y} \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ et la fonction g est surjective.
La fonction g est donc bijective et sa réciproque est donnée par

$$g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{2}\} : x \longmapsto \frac{9+x}{2x}.$$

(4) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $B = A - I_2$.

(b) Calculer B^2.

(c) En déduire que $A^n = nB + I_2$ pour tout entier $n \geq 0$.

NB : Pour $A \in \mathbb{C}^{r\times r}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ fois}}$. En particulier, $A^0 = I_r$.

Solution :

(a) On a

$$B = A - I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) On a

$$\begin{aligned} B^2 = B \cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) \\ (-3) \cdot 3 + (-3) \cdot (-3) & (-3) \cdot 3 + (-3) \cdot (-3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Procédons par récurrence sur n pour montrer que $A^n = nB + I_2$ pour tout entier $n \geq 0$.

Cas de base : Pour $n = 0$, on a $A^n = A^0 = I_2$ et $nB + I_2 = 0 \cdot B + I_2 = I_2$. Donc le cas de base est vérifié.

Induction : Supposons que $A^n = nB + I_2$ et montrons que $A^{n+1} = (n+1)B + I_2$. On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = (nB + I_2) \cdot (B + I_2) && \text{par HR et } A = B + I_2 \\ &= nB \cdot B + nB \cdot I_2 + I_2 \cdot B + I_2 \cdot I_2 && \text{car } B^2 = 0_2 \text{ et } B \cdot I_2 = B \\ &= 0 + nB + B + I_2 \\ &= (n+1)B + I_2 \end{aligned}$$

Comme la propriété est vraie pour $n = 0$, par récurrence elle est aussi vraie pour $n = 1$, ensuite pour $n = 2$, etc. La propriété $A^n = nB + I_2$ est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

Une autre manière de procéder est d'utiliser le binôme de Newton. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} A^n &= (B + I_2)^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i \underbrace{B^i}_{=0 \text{ si } i \geq 2} \underbrace{I_2^{n-i}}_{=I_2} \\ &= C_n^0 B^0 + C_n^1 B^1 \\ &= 1 \cdot I_2 + n \cdot B \\ &= I_2 + nB. \end{aligned}$$

(5) Discuter le rang et la compatibilité du système suivant, dont les inconnues sont $x, y, z \in \mathbb{R}$, en fonction du paramètre réel m. Dans les cas où il n'est pas de Cramer, donner son ensemble de solutions.

$$\begin{cases} x + my + 2z = m \\ -2x + y + (m-2)z = 1 \\ mx + y + 2z = 2m - 1 \end{cases}$$

Solution : Ce système peut être réécrit sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 2 \\ -2 & 1 & m-2 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m-1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice du système est donné par

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ -2 & 1 & m-2 \\ m & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 2 + m^2(m-2) - 4 - 2m - m + 2 + 4m \\ &= m^3 - 2m^2 + m \\ &= m(m^2 - 2m + 1) \\ &= m(m-1)^2 \end{aligned}$$

Ainsi, le système est de rang 3, et donc de Cramer, pour $m \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$. On va donc s'intéresser aux cas où $m = 0$ et $m = 1$.

- Cas où $m = 0$: Dans ce cas, le système devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  Le rang de la matrice vaut 2 car on peut extraire un mineur d'ordre 2 non nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

  Le rang de la matrice augmentée est 3 car

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - 0 - 2 - 4 = -4 \neq 0$$

  Comme les rangs sont différents, le système est incompatible et son ensemble de solutions est $S = \emptyset$.

- Cas où $m = 1$: Dans ce cas, le système devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice vaut 2 car on peut extraire un mineur d'ordre 2 non nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

En outre, le rang de la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

vaut également 2 car les premières et troisièmes lignes sont identiques et le mineur d'ordre 2 choisi ci-dessus est toujours de déterminant non nul.
Comme le système équivaut à

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -2x + y - z = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y + z = 1 \\ x = -z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 1 - z \\ x = -z \end{cases} \end{aligned}$$

l'ensemble des solutions du système est

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 1 - z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Examen de Mathématiques pour l'informatique 1

17 août 2021

Consignes générales

— La durée de l'examen est de 2h30.
— Répondre uniquement sur les feuilles fournies.
— Les feuilles rendues doivent être numérotées et comporter chacune vos nom et prénom.
— Répondre à la théorie en un seul tenant.
— Répondre à chaque exercice sur une feuille séparée.
— Calculatrices (ou équivalents) non autorisées.

1. Théorie

(1) Définir la notion d'ensemble dénombrable.
(2) Soient $A_1, \ldots, A_k$ des ensembles (où $k \geq 1$). Décrire les éléments du produit cartésien $A_1 \times \cdots \times A_k$,
(3) Soient A, B, C des ensembles. Démontrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
(4) Quand dit-on qu'une fonction $f\colon A \to B$ est surjective ? Démontrer que la composée de deux surjections est une surjection.
(5) Énoncer le théorème de décomposition en base entière. Donner la représentation de 231 en base 3. Démontrer que la représentation obtenue est la seule possible.

2. Exercices

(1) Un informaticien est amené à créer un programme dans lequel il doit implémenter une boucle dont la condition de continuation φ, qui dépend de trois variables a, b et c, est donnée par la conjonction des 3 propositions suivantes :

$$\psi_1 \equiv a \vee b \vee \neg c, \qquad \psi_2 \equiv \neg(b \vee c) \Rightarrow a \qquad et \qquad \psi_3 \equiv a \Rightarrow b.$$

Afin d'éviter les opérations inutiles de vérification de cette condition, il décide de chercher une forme normale conjonctive de φ de longueur minimale. En donner une. Justifier.

Solution : Tenant compte des tables de vérité des propositions données, on obtient celle de $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3$:

a	b	c	ψ_1	ψ_2	ψ_3	φ
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0

On constate alors directement que $\varphi \equiv b$ (puisque leurs tables de vérité sont identiques), ce qui constitue une forne normale conjonctive de φ qui est clairement de longueur minimale.

(2) (a) Démontrer que les nombres $p = 12n - 3$ et $q = 12n^2 + 3n - 2$ sont premiers entre eux pour tout entier $n \geq 1$ et donner l'inverse de p dans $\mathbb{Z}_q$.

(b) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{Z}_{14}$.

$$\begin{cases} 6x & - & 2y & = & 4 \\ 3x & + & 8y & = & 0 \end{cases}$$

Solution :

(a) Appliquons l'algorithme d'Euclide à p et q. Pour tout $n \geq 1$, on a $12n - 3 < 12n^2 + 3n - 2$ et on a successivement

$$\begin{aligned} 12n^2 + 3n - 2 &= (12n-3)n + 6n - 2, && \text{avec } 6n - 2 < 12n - 3 \\ 12n - 3 &= (6n-2)2 + 1, && \text{avec } 1 < 6n - 2 \\ 6n - 2 &= 1(6n-2) + 0 \end{aligned}$$

et comme le dernier reste non nul, à savoir 1, correspond au pgcd de p et q, on conclut que ces nombres sont premiers entre eux quel que soit $n \geq 1$.
On en déduit directement que p est inversible dans $\mathbb{Z}_q$ quel que soit $n \geq 1$. Pour déterminer l'inverse de p dans $\mathbb{Z}_q$, appliquons alors l'algorithme d'Euclide étendu : pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} 1 &= p - 2(6n-2) \\ &= p - 2(q - np) \\ &= (2n+1)p - 2q \end{aligned}$$

de sorte que l'inverse de p dans $\mathbb{Z}_q$ est $2n + 1$.

(b) Parmi tous les coefficients du système, seul 3 est inversible[1] dans $\mathbb{Z}_{14}$. Son inverse est 5 : en effet, $5 \cdot 3 = 15 = 1 \cdot 14 + 1$. La seconde équation équivaut donc successivement à

$$3x = -8y \Leftrightarrow 5 \cdot 3x = 5 \cdot (-8)y \Leftrightarrow x = \mathrm{MOD}(-40, 14)y \Leftrightarrow x = 2y.$$

En injectant ce résultat dans la première équation, on obtient alors successivement

$$\begin{aligned} 6 \cdot 2y - 2y = 4 &\iff 10y = 4 \\ &\iff \exists q \in \mathbb{Z} \ : \ 10y = 14q + 4 \\ &\iff \exists q \in \mathbb{Z} \ : \ 5y = 7q + 2 \\ &\iff \exists q \in \mathbb{Z} \ : \ 3 \cdot 5y = 3 \cdot (7q + 2) \\ &\iff \exists q \in \mathbb{Z} \ : \ y = \mathrm{MOD}(21, 14)q + 6 \\ &\iff \exists q \in \mathbb{Z} \ : \ y = 7q + 6 \end{aligned}$$

1. Attention : puisque 2 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}_{14}$, on ne peut pas diviser les 2 membres de la première équation par 2 ! !

Dans $\mathbb{Z}_{14}$, les valeurs acceptables pour y sont donc 6 ($q = 0$) et 13 ($q = 1$), qui mènent respectivement à $x = 12$ et $x = \mathrm{MOD}(26, 14) = 12$, si bien que l'ensemble des solutions du système est

$$S = \{(12, 6),\ (12, 13)\}.$$

(3) Discuter la compatibilité du système suivant, dont les inconnues sont $x, y, z \in \mathbb{R}$, en fonction du paramètre réel m. Dans les cas où il n'est pas de Cramer, donner son ensemble de solutions.

$$\begin{cases} 2x + y + mz = m \\ 2mx + my + z = m \\ (3m-1)x + (2m-1)y + (2-m)z = 1 \end{cases}$$

Solution : Ce système peut être réécrit sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 2m & m & 1 \\ 3m-1 & 2m-1 & 2-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice du système est donné par

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ 2m & m & 1 \\ 3m-1 & 2m-1 & 2-m \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ 2m & m & 1 \\ m-1 & m-1 & 1-m \end{vmatrix} \qquad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1+m & m \\ m & m+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-m \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \end{pmatrix} \\ &= (1-m)(m+1-m(m+1)) \\ &= (1-m)^2(m+1). \end{aligned}$$

Ainsi, le système est de rang 3, et donc de Cramer, pour $m \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. On va donc s'intéresser aux cas où $m = -1$ et $m = 1$.

- Cas où $m = -1$: Dans ce cas, le système devient

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  On voit directement que les deux premières équations sont incompatibles ! Notons que le rang de la matrice vaut 2 car on peut extraire un mineur d'ordre 2 non nul :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

  alors que celui de la matrice augmentée est 3 car

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

  Comme les rangs sont différents, cela mène à la même conclusion : le système est incompatible et son ensemble de solutions est $S = \emptyset$.

- Cas où $m = 1$: Dans ce cas, le système devient
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Notons que le rang de la matrice vaut 1 car les 3 lignes sont identiques. En outre, le rang de la matrice augmentée vaut également 1 pour la même raison. L'ensemble des solutions du système est donc dans ce cas-ci donné par
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - 2x - y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

(4) Démontrer que $9^n - 3$ est divisible par 6 pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Justifier.

<u>Solution</u> :
Procédons par récurrence sur n.

— Case de base : pour $n = 1$.
$$9^1 - 3 = 9 - 3 = 6$$
est divisible par 6. Donc le cas de base est vérifié.

— Récurrence : Supposons que $9^n - 3$ est divisible par 6 avec $n \in \mathbb{N}_0$ et montrons que $9^{n+1} - 3$ est divisible par 6. On a
$$\begin{aligned} 9^{n+1} - 3 &= 9 \cdot 9^n - 3 \\ &= 9 \cdot (9^n - 3) + 3 \cdot 9 - 3 \\ &= 9 \cdot (9^n - 3) + 24 \end{aligned}$$
Comme $9^n - 3$ est divisible par 6 par hypothèse de récurrence, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $9^n - 3 = 6k$.
On obtient donc
$$9^{n+1} - 3 = 9 \cdot 6k + 24 = 6 \cdot (9k + 4)$$
et comme $9k + 4 \in \mathbb{N}$, $9^{n+1} - 3$ est divisible par 6.

Conclusion : On sait que la propriété est vraie pour $n = 1$ par le cas de base. Comme elle est vraie pour $n = 1$, elle est aussi vraie pour $n = 2$ par récurrence. Comme elle est vraie pour $n = 2$, elle est aussi vraie pour $n = 3$, etc. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

(5) Soit la fonction
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
où A est la matrice, qui dépend du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, donnée par
$$\begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda & -\lambda \\ -2 & -4\lambda & 2 \\ 3 & \lambda & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer le rang de la matrice A en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de λ la fonction f est-elle injective ? Justifier.

(c) Montrer que si f est injective, alors f est surjective.

(d) Donner la fonction réciproque de f pour chacune des valeurs de λ où cela est possible, en justifiant pourquoi cela est possible pour ces valeurs.

(e) Dans le cas où $\lambda = 1$, donner une condition sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que

$$\exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

<u>Solution</u> :

(a) Comme la sous-matrice (de dimension 2) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est de déterminant non nul :

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10 \neq 0,$$

le rang de la matrice A vaut au moins 2 pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Regardons maintenant pour quels $\lambda \in \mathbb{R}$ le range de la matrice A vaut 3. C'est le cas lorsque le déterminant de A est non nul. On a

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda & -\lambda \\ -2 & -4\lambda & 2 \\ 3 & \lambda & 2 \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -\lambda \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} 0 & 2 & -\lambda \\ 0 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (C_1 \leftarrow C_1 + C_3) \\
&= \lambda \ . \ 5 \ . \ (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 5\lambda(4 - 4\lambda) \\
&= 20\lambda(1 - \lambda).
\end{aligned}$$

Le déterminant de A est donc non nul pour $\lambda \neq 0$ et pour $\lambda \neq 1$.
Cela permet de conclure que la matrice A est de rang 3 pour $\lambda \neq 0$ et pour $\lambda \neq 1$ et de rang 2 sinon.

(b) Par définition, la fonction f est injective si pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$,

$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ implique que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Cette implication est vérifiée si et seulement si A est inversible. Ainsi, la fonction f est injective si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$.

(c) Par définition, f est surjective si pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, il existe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Si f est injective, alors A est inversible. Ainsi le système $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est de Cramer et admet une seule solution, à savoir

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

donc f est surjective.

(d) La fonction f admet une réciproque si elle est bijective. Grâce aux points précédents, nous savons que si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$, alors f est injective et surjective aussi. Donc quand $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$, f est bijective et sa fonction réciproque est donnée par

$$f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(e) Dans le cas où $\lambda = 1$, nous savons, grâce au point (a), que rg(A)=2. Si le système est de Cramer, alors celui-ci admettra une solution. Pour ce faire, il faut que

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ -2 & -4 & 2 & b \\ 3 & 1 & 2 & c \end{pmatrix} = 2.$$

Pour que le rang de la matrice augmentée soit égal à 2, il suffit que 2 lignes soient multiples l'une de l'autre. Au vu des nombres présents dans la matrice, les seules lignes qui peuvent être multiples l'une de l'autre sont les 2 premières et elles le sont si et seulement si $b = -2a$.

Ainsi, si $b = -2a$, alors le système sera de Cramer et possèdera toujours une solution.

Correctif interrogation de Mathématiques pour l'informatique 1

3 novembre 2021

1. Théorie

(1) Lorsqu'on souhaite démontrer une alternative $\phi \vee \psi$, quelle équivalence logique peut-on utiliser pour se donner une hypothèse supplémentaire ? Illustrer cette équivalence logique avec un énoncé mathématique ou un énoncé en langue française.

Solution :
Pour démontrer une alternative $\phi \vee \psi$, on utilise l'équivalence logique $\theta \implies (\phi \vee \psi) \equiv (\theta \wedge \neg\phi) \implies \psi$. L'hypothèse de départ est uniquement θ. Grâce à cette équivalence, on se donne $\neg\phi$ comme hypothèse supplémentaire.

Voici une illustration par un énoncé mathématique. Pour démontrer que si un entier n est multiple de 4, alors n est multiple de 8 ou $n+4$ est multiple de 8, on pourra, de manière équivalente, démontrer que si un entier n est multiple de 4 mais pas de 8, alors $n+4$ est multiple de 8.

Et voici une illustration par un énoncé en français. La phrase "S'il pleut, alors j'emporte un imperméable ou un parapluie" est équivalente à "S'il pleut et que je n'emporte pas d'imperméable, alors j'emporte un parapluie".

(2) Soient A et B deux ensembles. Comment montre-t-on que $A = B$? Illustrer votre réponse en montrant que les ensembles E et F suivants sont égaux :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - y = 1\} \qquad \text{et} \qquad F = \{(t+1, 4t+3) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Solution :
Une égalité d'ensemble se démontre par double inclusion : il faut montrer que $A \subseteq B$ et que $B \subseteq A$. Autrement dit, tout élément de A doit appartenir aussi à B, et inversement, tout élément de B doit aussi appartenir à A.

Montrons l'égalité des ensembles E et F donnés par double inclusion.

Soit d'abord un élément de E. Un tel élément est un couple de réels (x, y) vérifiant l'égalité $4x - y = 1$. Pour avoir $x = t + 1$, on choisit $t = x - 1$. Ainsi, t est un réel tel que $x = t + 1$ et $y = 4x - 1 = 4(t + 1) - 1 = 4t + 3$. Ainsi, on a $(x, y) = (t + 1, 4t + 3)$ pour un réel t, ce qui montre que (x, y) appartient à F. Nous venons de montrer que $E \subseteq F$.

Montrons à présent l'autre inclusion. Considérons un élément de F. Un tel élément est un couple $(t+1, 4t+3)$ où t est un certain réel. On a $4(t+1)-(4t+3) = 4t+4-4t-3 = 1$, ce qui montre que le couple $(t + 1, 4t + 3)$ appartient à E. Ainsi, on a aussi $F \subseteq E$.

(3) Les affirmations suivantes ont-elles le même sens ? Pourquoi ?

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 0 \qquad \text{et} \qquad \exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + y = 0.$$

Solution :
Ces affirmations n'ont pas le même sens. La première affirmation nous dit que tout réel possède un opposé. Cette affirmation est vraie puisque si x est donné, il suffit de choisir $y = -x$. La deuxième affirmation nous dit qu'il existe un réel y qui est l'opposé de tous les réels x. Cette affirmation est fausse car chaque réel possède un unique opposé et deux réels différents ont des opposés différents. Par exemple, l'opposé de 2 est -2 mais $3 - 2 \neq 0$.

2. Exercices

(1) Un candidat participant à un jeu télévisé doit ouvrir une porte afin de gagner les cadeaux qui se trouvent derrière celle-ci. Pour ce faire, il doit placer trois interrupteurs A, B et C sur les bonnes positions (ceux-ci pouvant être en position ON ou OFF). A ce stade, le candidat a réussi à obtenir les trois indices suivants :

(a) les interrupteurs A ou B sont en position ON, mais pas les deux ;

(b) lorsque A et C sont en position ON, B ne doit pas l'être ;

(c) si A est en position ON, alors B ou C également.

(i) Etablir une forme normale disjonctive de longueur minimale résumant ces informations.

(ii) Le candidat obtient finalement un indice supplémentaire, à savoir les interrupteurs A et C ne sont pas sur les mêmes positions. Traduire cet indice à l'aide d'un seul connecteur logique. Quelles sont les positions des interrupteurs déclenchant l'ouverture de la porte ?

Solution :

(i) Si on considère les variables propositionnelles α, β, γ représentant respectivement "A est en position ON", "B est en position ON" et "C est en position ON", les trois indices donnés sont respectivement logiquement équivalents à

(a) $\alpha \tilde{\vee} \beta \quad \equiv \quad \varphi_1$ où $\tilde{\vee}$ désigne le "ou exclusif"

(b) $(\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow \neg\beta \quad \equiv \quad \varphi_2$

(c) $\alpha \Rightarrow (\beta \wedge \gamma) \quad \equiv \quad \varphi_3$

et la totalité des informations à $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \equiv \phi$.

Déterminons la table de vérité de ϕ :

α	β	γ	φ_1	$\alpha \wedge \gamma$	$\neg\beta$	φ_2	$\beta \vee \gamma$	φ_3	ϕ
0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	1	0

Utilisons alors une table de Karnaugh de ϕ pour déterminer une forme normale disjonctive de ϕ :

ϕ	(α,β)			
(γ)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$
0	0	1	0	0
1	0	1	0	1

Cette table ne contient aucun rectange de taille 8, ni de taille 4. Elle en contient par contre un de taille 2, à savoir

$\neg\phi$	(α,β)			
(γ)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$
0	0	**1**	0	0
1	0	**1**	0	1

qui correspond à la proposition $\neg\alpha\wedge\beta$. Le dernier 1 ne peut quant à lui être considéré que dans un rectangle de taille 1, menant à la proposition $\alpha \wedge \neg\beta \wedge \gamma$.
Une forme normale disjonctive de longueur minimale de ϕ est donc donnée par

$$\boxed{(\neg\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg\beta \wedge \gamma)}.$$

(ii) Le fait que les interrupteurs A et C ne soient pas sur les mêmes positions peut se traduire par

$$A \Leftrightarrow \neg C \qquad \text{ou encore} \qquad A\tilde{\vee}C$$

Tenant compte de cet indice supplémentaire, il suffit de regarder dans la table de vérité ci-dessus pour constater que la seule des 3 lignes vérifiant les informations correpondant à ϕ (c-à-d. celles où la valeur de ϕ vaut 1), et présentant des valeurs distinctes pour α et γ, mène à $\neg\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$: il faut donc que l'interrupteur A soit en position OFF, et B et C en position ON, pour que la porte s'ouvre.

(2) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Solution :
Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_0$.
<u>Cas de base ($n = 1$)</u>
La formule considérée est vérifiée pour n=1 puisque

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

et

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)_{n=1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

<u>Cas de récurrence</u>
Supposons que la formule considérée est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ <u>fixé</u>, c'est-à-dire que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

et montrons qu'elle est encore vraie pour le naturel consécutif $n + 1$, c'est-à-dire que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Il vient directement

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} && \text{(on sort le terme pour } i = n+1\text{)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} && \text{(hyp. de récurrence)} \\
&= 1 + \frac{-(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 + \frac{-n-1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+2}
\end{aligned}
$$

Conclusion

Tenant compte des cas de base et de récurrence, la formule considérée est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

(3) On considère les ensembles $E = \{\{0\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ et $S = \{0, a, b\}$ où $a, b \in \mathbb{Z}_0$.

(a) Donner le produit cartésien de E et S.

(b) Soit R la relation de E dans S telle que $e \, R \, s$ si s est la somme des éléments de e.

(i) Si a et b ne sont ni égaux ni opposés, cette relation est-elle une fonction ? une fonction injective ? une fonction surjective ?

(ii) Qu'en est-il si a et b sont opposés ?

(iii) Si $a = b$, que deviennent les ensembles E et S ? La relation R est-elle dans ce cas une fonction ? une fonction injective ? une fonction surjective ?

(iv) Dans chacun des cas précédents, si R est une fonction bijective, en donner la fonction réciproque.

Solution :

(a) On a

$$
\begin{aligned}
E \times S = \big\{&(\{0\}, 0), (\{0\}, a), (\{0\}, b), (\{a\}, 0), (\{a\}, a), (\{a\}, b), \\
&(\{b\}, 0), (\{b\}, a), (\{b\}, b), (\{a, b\}, 0), (\{a, b\}, a), (\{a, b\}, b)\big\}.
\end{aligned}
$$

(b) (i) Si a et b ne sont ni égaux ni opposés, on a

$$R = \{(\{0\}, 0), (\{a\}, a), (\{b\}, b)\}.$$

Ainsi, R n'est pas une fonction car l'élément $\{a, b\}$ de E n'est en relation avec aucun élément de S.

(ii) Si a et b sont opposés, on a $a + b = 0$. Ainsi on obtient

$$R = \{(\{0\}, 0), (\{a\}, a), (\{b\}, b), (\{a, b\}, 0)\}.$$

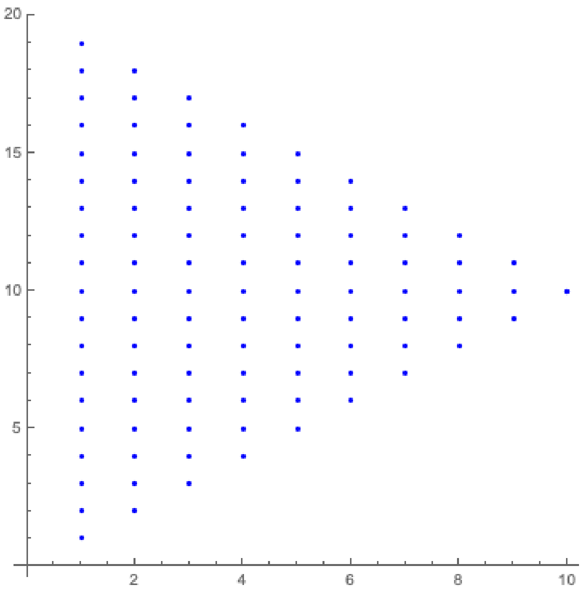
La relation R est donc une fonction. La fonction R n'est pas injective car $0 \in S$ est l'image des deux éléments $\{0\}$ et $\{a, b\}$ de E. En revanche, la fonction R est surjective dans S car chaque élément de S est l'image d'au moins un élément de E.

(iii) Si $a = b$, on a $E = \{\{0\}, \{a\}\}$ et $S = \{0, a\}$ et donc
$$R = \{(\{0\}, 0), (\{a\}, a)\}.$$
Ainsi, R est une fonction, plus particulièrement une fonction injective et surjective dans S, c'est-à-dire une fonction bijective.

(iv) Par les points précédents, trouvons la fonction réciproque de R lorsque $a = b$. La bijection réciproque de R est
$$R^{-1} \colon S \to E,\ x \mapsto \{x\}.$$
C'est-à-dire, on a $R^{-1}(0) = \{0\}$ et $R^{-1}(a) = \{a\}$.

(4) Permuter les sommes suivantes :
$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=i}^{20-i} (i+j)^3.$$

Solution :
Les indices $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ intervenant dans la somme sont représentés ci-dessous.



On remarque donc que $j \in \{1, 19\}$. De plus, on a
$$\begin{cases} 1 \le i \le 10 \\ i \le j \le 20 - i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le j \le 19 \\ 1 \le i \\ i \le 10 \\ i \le j \\ i \le 20 - j \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le j \le 19 \\ 1 \le i \\ i \le \min(10, j, 20 - j) \end{cases}.$$
Ainsi, on obtient
$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=i}^{20-i} (i+j)^3 = \sum_{j=1}^{19} \sum_{i=1}^{\min(10,j,20-j)} (i+j)^3 = \sum_{j=1}^{19} \sum_{i=1}^{\min(j,20-j)} (i+j)^3$$

où la dernière égalité est obtenue car si j appartient à l'ensemble $\{1, 10\}$, on a $\min(10, j, 20-j) = j$, et si j appartient à l'ensemble $\{11, 19\}$, on a $\min(10, j, 20-j) = 20-j$. Ainsi, la somme peut être réécrite par

$$\sum_{j=1}^{10} \sum_{i=1}^{j} (i+j)^3 + \sum_{j=11}^{19} \sum_{i=1}^{20-j} (i+j)^3.$$

NOM : ______________________________ Prénom : __________________________

Examen de Mathématiques pour l'informatique 1 - *Correctif*

24 janvier 2022

Consignes :

- Répondre uniquement sur les feuilles fournies.
- Les feuilles rendues doivent être numérotées et comporter chacune vos Nom et Prénom.
- Rendre au moins une feuille par exercice résolu.
- Calculatrices (ou équivalents) non autorisées.
- Durée de l'examen : 3h30.
- Si vous ne répondez pas à certaines questions, indiquez-le par une croix dans le tableau ci-dessous.

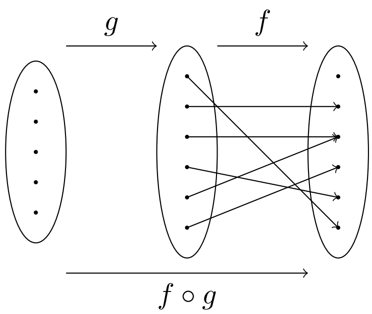
Théorie	Ex. (1)	Ex. (2)	Ex. (3)	Ex. (4)	Ex. (5)

1. Théorie

(1) Sur quelle équivalence logique se base la technique de démonstration par la production d'un contre-exemple ? Illustrer votre réponse avec un énoncé mathématique.

(2) Décrire les éléments du produit cartésien de deux ensembles quelconques E et F. Dans le cas où $E = \{0, 2, 4\}$ et $F = \{\text{pomme}, \text{poire}\}$, donner explicitement tous les éléments de $E \times F$, $E \cup F$ et $E \setminus F$.

(3) Définir les notions de fonction injective et de fonction composée. On donne la fonction f par le diagramme ci-dessous. Est-il possible de définir une fonction g telle que $f \circ g$ soit injectif ? Justifier. Si oui, en dessiner une.



(4) Soient trois matrices carrées A, B, C de même taille. Est-il toujours vrai que $(AB)C = A(BC)$? Et a-t-on toujours $AB = BA$? Si oui, donner une démonstration de cette propriété. Si non, donner un contre-exemple.

(5) Parmi les systèmes linéaires suivants, lesquels sont de Cramer ? Pourquoi ?

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

De façon générale, combien de solutions admet un système de Cramer ? Donner une démonstration de votre affirmation.

(6) Dans le cours, nous avons vu deux façons de calculer l'inverse d'une matrice carrée (lorsque celui-ci existe). Décrire ces deux méthodes. L'une d'elles est-elle plus avantageuse ? Si oui, à quel sens et pourquoi ?

2. Exercices

(1) (a) Construire une table de Karnaugh pour la proposition φ dont la table de vérité est détaillée ci-dessous et en déduire une forme normale conjonctive de longueur minimale pour φ.

a	b	c	d	φ	a	b	c	d	φ
0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0

Solution : Afin de déterminer une FNC de φ, déterminons une FND pour $\neg\varphi$. Une table de Karnaugh de la proposition $\neg\varphi$ est donnée par

$\neg\varphi$		(c, d)			
		(0,0)	(0,1)	(1,1)	(1,0)
(a, b)	(0,0)	1	0	0	1
	(0,1)	0	1	1	0
	(1,1)	0	1	1	0
	(1,0)	1	0	0	1

Il est impossible de former un rectangle de 1 de taille $2^3 = 8$. Il est par contre possible d'en former deux de taille $2^2 = 4$: d'une part, avec les quatre 1 situés au centre de la table, d'autre part, avec les quatre 1 situés "aux coins" de la table (dont le bord gauche peut être recollé au bord droit, et le bord haut au bord bas). Ces deux rectangles mènent respectivement aux formules $b \wedge d$ et $\neg b \wedge \neg d$, de sorte que

$$\neg\varphi \equiv (b \wedge d) \vee (\neg b \wedge \neg d)$$

et

$$\varphi \equiv \neg(\neg\varphi) \equiv \neg(b \wedge d) \wedge \neg(\neg b \wedge \neg d) \equiv (\neg b \vee \neg d) \wedge (b \vee d).$$

(b) Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition suivante : "*Quels que soient les nombres réels positifs x et y, il existe un multiple entier de x qui est strictement supérieur à y*".

Solution :

$$\forall x, y \geq 0,\ \exists k \in \mathbb{Z}\ :\ kx > y.$$

(c) L'équivalence suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

$$\{2\} \subset \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$$

Solution : Une équivalence est vraie lorsque les deux membres de celle-ci ont les mêmes valeurs de vérité. Dès lors, comme les deux membres sont faux, l'équivalence donnée est vraie ! En effet, $\{2\}$ est un élément de l'ensemble $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ et n'en est donc pas une partie. Au contraire, $\emptyset$ est une partie de l'ensemble $\{\{\emptyset\}\}$ (puisque $\emptyset$ est une partie de tout ensemble), mais ce n'est pas un élément de cet ensemble puisque ce dernier ne contient que l'élément $\{\emptyset\}$.

(2) (a) Écrire le nombre 176 en base 3.

Solution : La plus grande puissance de 3 contenue dans le nombre 176 étant $3^4 = 81$, il vient successivement

$$\begin{aligned} 176 &= \mathbf{2} \times 3^4 + 14 \\ 14 &= \mathbf{0} \times 3^3 + 14 \\ 14 &= \mathbf{1} \times 3^2 + 5 \\ 5 &= \mathbf{1} \times 3 + 2 \\ 2 &= \mathbf{2} \times 3^0 \end{aligned}$$

de sorte que l'écriture de 176 en base 3 est donnée par 20112.

(b) On considère le nombre dont l'écriture en base 8 est 540123. Quelle est son écriture en base 2 ?

Solution : Puisque $8 = 2^3$, on peut directement obtenir l'écriture du nombre considéré en base 2 en écrivant chaque chiffre de son écriture en base 8 en base 2, soit 101|100|000|001|010|011.

(3) (a) Si possible, calculer les inverses de 40 et 41 modulo 150.

Solution : Puisque $\mathrm{PGCD}(40, 150) = 10 \neq 1$, c'est-à-dire 40 et 150 ne sont pas premiers entre eux, 40 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}_{150}$. Par contre, 41 est bien inversible puisqu'il est premier avec 150 :

$$\begin{aligned} 150 &= 3 \times 41 + 27 \\ 41 &= 1 \times 27 + 14 \\ 27 &= 1 \times 14 + 13 \\ 14 &= 1 \times 13 + 1 \\ 13 &= 13 \times 1 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} 1 &= 14 - 13 = 14 - (27 - 14) \\ &= 2 \times 14 - 27 = 2 \times (41 - 27) - 27 \\ &= 2 \times 41 - 3 \times 27 \\ &= 2 \times 41 - 3 \times (150 - 3 \times 41) \\ &= 11 \times 41 - 3 \times 150 \end{aligned}$$

de sorte que $11 \times 41 = 1 + 3 \times 150$, et donc $\mathrm{MOD}(11 \times 41, 150) = 1$, ce qui entraîne que l'inverse de 41 dans $\mathbb{Z}_{150}$ est 11.

(b) Résoudre les équations suivantes d'inconnue x dans $\mathbb{Z}_{150}$:

$$\text{(i) } 40x + 10 = 0 \qquad \text{(ii) } 41x + 10 = 0$$

Solution :
(i) Il vient successivement

$$\begin{aligned} 40x + 10 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 40 \cdot_{150} x = \mathrm{MOD}(-10, 150) = 140 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ 40x = 140 + 150k \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ 4x = 14 + 15k \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{MOD}(4x, 15) = 14 \\ &\Leftrightarrow \quad 4 \cdot_{15} x = 14 \end{aligned}$$

De là, 4 étant inversible dans $\mathbb{Z}_{15}$ puisque 4 est premier avec 15, on peut chercher son inverse : on constate rapidement que $4 \times 4 = 16 = 1 + 15$, ce qui assure que 4 est son propre inverse. On peut donc poursuivre l'équivalence précédente comme suit

$$\begin{aligned} 40x + 10 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4 \cdot_{15} 4 \cdot_{15} x = 4 \cdot_{15} 14 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \mathrm{MOD}(4 \times 14, 15) = \mathrm{MOD}(11, 15) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ x = 11 + 15k \end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation donnée dans $\mathbb{Z}_{150}$ est

$$S = \{11, 26, 41, 56, 71, 86, 101, 116, 131, 146\}.$$

(ii) Puisque l'inverse de 41 dans $\mathbb{Z}_{150}$ est 11, on a directement successivement

$$\begin{aligned} 41x + 10 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 41 \cdot_{150} x = \mathrm{MOD}(-10, 150) \\ &\Leftrightarrow \quad 11 \cdot_{150} 41 \cdot_{150} x = 11 \cdot_{150} (-10) \\ &\Leftrightarrow \quad x = \mathrm{MOD}(11 \times (-10), 150) = \mathrm{MOD}(-110, 150) \\ &\Leftrightarrow \quad x = 40 \end{aligned}$$

de sorte que l'unique solution de cette équation dans $\mathbb{Z}_{150}$ est 40.

(4) Pour tout $n \geq 1$, calculer M^n avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution : Regardons l'expression de M^n pour les premières valeurs de n.

Pour $n = 2$: $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4M,$ $\qquad (\star)$

Pour $n = 3$: $M^3 = MM^2 = M(4M) = 4M^2 = 4(4M) = 4^2M,$

Pour $n = 4$: $M^4 = MM^3 = M(4^2M) = 4^2M^2 = 4^2(4M) = 4^3M,$

et on peut noter que $M = 4^0M$ pour $n = 1$, si bien que l'on peut supposer que

$$M^n = 4^{n-1}M \quad \forall n \geq 1.$$

Démontrons-le par récurrence.

Cas de base $(n = 1)$: $M^1 = 4^0M = M$ vu ce qui précède.

Cas de récurrence : Supposons la formule vraie pour $n \geq 1$ fixé, et montrons qu'elle l'est encore pour $n + 1$. Il vient

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= MM^n = M\left(4^{n-1}M\right) && \text{(vu l'hyp. de réc.)} \\ &= 4^{n-1}M^2 = 4^{n-1}4M && (\text{vu}(\star)) \\ &= 4^nM \end{aligned}$$

comme attendu.

En conclusion, $M^n = 4^{n-1}M \quad \forall n \geq 1$.

(5) Pour chaque $t \in \mathbb{C}$, considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & t+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & t \end{pmatrix}$.

(a) Discuter le rang de la matrice A en fonction du paramètre complexe t.

Solution :

$\boxed{\textit{Méthode 1}}$

Notons tout d'abord que l'on peut extraire de A un mineur d'ordre 2 non nul, par exemple

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

de sorte que $\mathrm{rg}(A) \geq 2$. De plus, il vient

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & t+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & t+1 \\ 0 & -2 & t+1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} && \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{pmatrix} \\ &= -1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & t+1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} && \begin{pmatrix} \text{1ère loi des mineurs} \\ \text{à la 1ère colonne} \end{pmatrix} \\ &= -(2-(t+1)) = t-1 \end{aligned}$$

et donc, $\mathrm{rg}(A) = 3 \Leftrightarrow t - 1 \neq 0$.

$\boxed{\textit{Méthode 2}}$

Appliquons l'algorithme de Gauss aux lignes de la matrice A. Il vient successivement

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right. \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & t+1 \\ 0 & -2 & t+1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array} \right. \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & t+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

et on constate à ce stade que

- si $t \neq 1$, alors le rang de A vaut 3 puisque[1] $\det(A) = t - 1 \neq 0$.
- si $t = 1$, alors une ligne de 0 apparaît, mais les deux précédentes sont linéairement indépendantes puisqu'elles ne sont pas multiples l'une de l'autre (vu la position des "0" ; on peut aussi extraire un mineur d'ordre 2 non nul comme ci-dessus) et le rang de A vaut, dans ce cas, 2.

$\boxed{\text{En conclusion,}}$

$$\mathrm{rg}(A) = \left\{ \begin{array}{ll} 3, & t \neq 1 \\ 2, & t = 1 \end{array} \right. .$$

(b) Résoudre le système suivant dans les cas où il n'est pas de Cramer :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solution : Le système est de Cramer ssi $\det(A) \neq 0$, soit ssi $t - 1 \neq 0$ vu ce qui précède. Par conséquent, le système n'est pas de Cramer uniquement lorsque $t = 1$, auquel cas

1. En effet, les opérations effectuées sur les lignes de A ne changent pas la valeur du déterminant, qui vaut pour la dernière matrice le produit des éléments diagonaux, à savoir $-(t-1)$, et nous avons effectué 1 permutation de lignes, ce qui change le signe du déterminant.

le système se réécrit

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=\mathrm{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=B}.$$

Appliquons l'algorithme de Gauss aux lignes de la matrice augmentée $(A|B)$. il vient successivement

$$\left\{ L_2 \leftrightarrow L_1 \right. \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right. \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \end{array} \right. \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left\{ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \right. \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On remarque que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 2$, ce qui entraîne que le système est compatible. Ce dernier équivaut simplement à

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2z = 1 \\ y - z = 1 \end{array} \right. , \qquad \text{ou encore à} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = 2z + 1 \\ y = z + 1 \end{array} \right.$$

de sorte que l'ensemble des solutions du système est donné par

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + 2z \\ 1 + z \\ z \end{pmatrix} \ : \ z \in \mathbb{C} \right\}.$$

(c) Déterminer une valeur du paramètre complexe t telle que $\det(A) = 10$. Dans ce cas, déterminer $\det(B)$ en sachant que $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ et $\det(A^{-1}B^2) = 5$.

Solution : Vu ce qui précède, on sait que $\det(A) = t - 1$, de sorte que

$$\det(A) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad t - 1 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad t = 11,$$

auquel cas

$$\begin{aligned} \det(A^{-1}B^2) = 5 &\Leftrightarrow \det(A^{-1}) \cdot \det(B) \cdot \det(B) = 5 && (A^{-1} \text{ et } B \text{ étant carrées}) \\ &\Leftrightarrow \frac{(\det(B))^2}{\det(A)} = 5 && \left(\text{puisque } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}\right) \\ &\Leftrightarrow (\det(B))^2 = 50 && (\text{puisque } \det(A) = 10) \\ &\Leftrightarrow \det(B) = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Les valeurs de t cherchées sont donc $-5\sqrt{2}$ et $5\sqrt{2}$.

Bonus : Donner un exemple d'une telle matrice B.

Solution : Une telle matrice est par exemple donnée par $\begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

NOM : ______________________________ Prénom : ______________________________

Examen de Mathématiques pour l'informatique 1 - *Correctif*

13 juin 2022

Consignes :

- Répondre uniquement sur les feuilles fournies.
- Les feuilles rendues doivent être numérotées et comporter chacune vos Nom et Prénom.
- Rendre au moins une feuille par exercice résolu.
- Calculatrices (ou équivalents) non autorisées.
- Durée de l'examen : 3h30.
- Cochez le résultat WIMS que vous avez choisi de conserver :

WIMS Q1	WIMS Q2

- Si vous ne répondez pas à certaines questions, indiquez-le par une croix dans le tableau ci-dessous.

Théorie	Ex. (1)	Ex. (2)	Ex. (3)	Ex. (4)

1. Théorie

(1) Sur quelle équivalence logique se base la technique de démonstration par l'absurde ? Illustrer votre réponse en démontrant que l'équation $9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0$ n'admet pas de solution entière.

Solution : La technique de démonstration par l'absurde se base sur l'équivalence logique $\varphi \equiv \neg\varphi \implies (\psi \wedge \neg\psi)$. Illustrons maintenant cette technique sur l'exemple proposé. Procédons par l'absurde en supposant que l'équation $9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0$ admette une solution entière. Dans ce cas, on pourrait trouver un entier a tel que $3(3a^5 - 4a^4 + 2a) = 5$. Puisque $3a^5 - 4a^4 + 2a$ est aussi entier, on obtient que 5 devrait être divisible par 3, ce qui n'est pas le cas. Nous en concluons que l'équation $9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0$ n'admette aucune solution entière.

(2) Écrire les ensembles suivants sous forme de produit cartésien :

$$E = \{(h, d), (h, j), (h, b), (h, c)\}$$

et

$$F = \{(5, 9), (0, 9), (8, 9), (5, 4), (0, 4), (8, 4), (5, 3), (0, 3), (8, 3)\}.$$

Solution : On a

$$E = \{h\} \times \{d, j, b, c\}$$

et

$$F = \{5, 0, 8\} \times \{9, 4, 3\}.$$

(3) Définir la notion de fonction surjective et de composée de deux fonctions. Démontrer que la composée de deux fonctions surjectives est une fonction surjective.

Solution : Je vous renvoie vers les notes de cours pour cet item.

(4) Décrire l'algorithme d'Euclide. En particulier, que prend-il en entrée et quelle est sa sortie ? Démontrer que celui-ci est correct et se termine toujours. Illustrer votre démonstration sur les entrées 1078 et 322.

Solution :

Il est attendu que vous donniez le pseudo-code de l'algorithme d'Euclide. Ensuite, il s'agit du théorème 1.62 des notes de cours. Illustrons la démonstration sur les entrées données. On a que $1078 > 322$. L'agorithme d'Euclide passe quatre fois dans la boucle "while". Il calcule successivement les divisions euclidiennes suivantes :

$$\begin{aligned} 1078 &= 3 \cdot 322 + 112 \\ 322 &= 2 \cdot 112 + 98 \\ 112 &= 1 \cdot 98 + 14 \\ 98 &= 7 \cdot 14 + 0. \end{aligned}$$

L'algorithme d'Euclide sort le dernier reste non nul, à savoir 14. Pour vérifier que 14 est bien le pgcd de 1078 et 322, nous devons, comme dans la démonstration, vérifier que 14 est un diviseur commun et que tout autre diviseur de 1078 et 322 divise également 14. Pour montrer que 14 est un diviseur commun, nous remontons les égalités. On obtient sucessivement :

$$\begin{aligned} 98 &= 7 \cdot 14 \\ 112 &= 1 \cdot 98 + 14 = 7 \cdot 14 + 14 = 8 \cdot 14 \\ 322 &= 2 \cdot 112 + 98 = 2 \cdot 8 \cdot 14 + 7 \cdot 14 = 23 \cdot 14 \\ 1078 &= 3 \cdot 322 + 112 = 3 \cdot 23 \cdot 14 + 8 \cdot 14 = 77 \cdot 14. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que tout autre diviseur d de 1078 et 322 divise également 14 en descendant les égalités. Soit d un tel diviseur.

$$\begin{aligned} &\text{Puisque } d \text{ divise } 1078 \text{ et } 322 \text{ et que } 1078 - 3 \cdot 322 = 112, \text{ on obtient que } d \text{ divise } 112. \\ &\text{Puisque } d \text{ divise } 322 \text{ et } 112 \text{ et que } 322 - 2 \cdot 112 = 98, \text{ on obtient que } d \text{ divise } 98. \\ &\text{Puisque } d \text{ divise } 322 \text{ et } 112 \text{ et que } 112 - 1 \cdot 98 = 14, \text{ on obtient que } d \text{ divise } 14. \end{aligned}$$

(5) Vrai ou faux ? Justifier.

(a) Un système linéaire homogène de 8 équations à coefficients réels, à 7 inconnues et de rang 4 est toujours compatible.

(b) Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$. Pour tout $B \in \mathbb{R}^{4\times 1}$, le système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$ admet une solution.

(c) Un système linéaire non homogène de 8 équations à coefficients réels, à 3 inconnues et de rang 3 est toujours compatible.

(d) Il existe des systèmes linéaires à 3 équations, 6 inconnues qui sont de rang 2.

Solution :

(a) Vrai. Un système homogène est toujours compatible.

(b) Faux. Par exemple, le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

n'admet pas de solution puisque

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

alors que

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}=3.$$

(c) Faux. Par exemple, le système

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

est de rang 3 et est incompatible la quatrième ligne du sytème correspond à l'équation $0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=1$.

(d) Vrai. Par exemple, le sytème

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

a 3 équations, 6 inconnues et est de rang 2.

2. Exercices

(1) Un informaticien étudie l'effet d'un programme sur l'incrémentation (augmentation d'une unité) des variables entières A, B, C et D préalablement allouées et initialisées à un entier. Il établit rapidement le constat suivant :

- Si les variables A ou B sont incrémentées, alors D ne l'est pas.
- Si C est incrémentée, alors B ne l'est pas ; et si A l'est, alors C ne l'est pas.
- Si D est incrémentée, alors C l'est aussi.

(a) Etablir une proposition logique φ traduisant la conjonction de ces 3 constatations.

(b) Dans le cas où il est certain que la variable C est incrémentée, déterminer un résumé de φ sous la forme d'une FNC ou d'une FND.

(c) Après s'être simplement assuré que la variable C est bien incrémentée au sortir du programme (pour être dans le cas précédent), l'informaticien peut-il tirer des conclusions sur l'incrémentation des trois autres variables ? Justifier.

Solution :

(a) En désignant par a (resp. b, c, d) les propositions "La variable A (resp. B, C, D) est incrémentée", une traduction de la conjonction des 3 constatations données est par exemple

$$\varphi\equiv((a\vee b)\Rightarrow\neg d)\wedge(c\Rightarrow\neg b)\wedge(a\Rightarrow\neg c)\wedge(d\Rightarrow c).$$

(b) Si la variable C est assurément incrémentée, c'est-à-dire si c est une tautologie, alors la table de vérité de φ est la suivante :

c	a	b	d	φ
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	0

de sorte que la table de Karnaugh correspondante est donnée par

φ		(b, d)			
		(0,0)	(0,1)	(1,1)	(1,0)
(c, a)	(1,0)	1	1	0	0
	(1,1)	0	0	0	0

Un unique rectangle de 1 (de taille 2) peut alors être formé, menant à

$$\varphi \equiv c \wedge \neg a \wedge \neg b, \qquad \text{ou encore}^{1} \qquad \varphi \equiv \neg a \wedge \neg b$$

puisque, dans ce cas-ci, c est une tautologie.

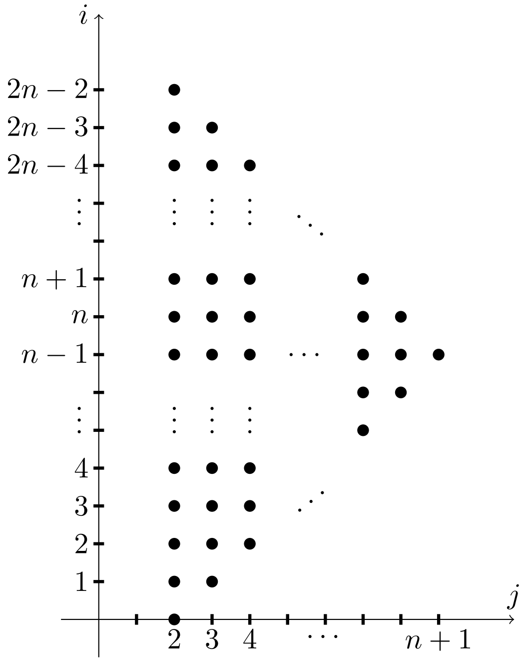
(c) Si la variable C est incrémentée (c-à-d. c est une tautologie), le point précédent, qui traduit le constat de départ dans ce cas, conduit au fait que les variables A et B ne sont pas incrémentées. Il n'y a par contre aucune certitude en ce qui concerne l'incrémentation de la variable D.

(2) (a) Soit un entier $n \geq 1$. Permuter les sommes suivantes :

$$\sum_{j=2}^{n+1} \sum_{i=j-2}^{2n-j} (i^2 + j^3).$$

Solution : Les indices $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ intervenant dans la somme sont représentés ci-dessous.

1. Notons qu'il s'agit à la fois d'une FND et d'une FNC.



On remarque donc que $i \in \{0, \ldots, 2n-2\}$. De plus, on a

$$\begin{cases} 2 \leq j \leq n+1 \\ i \leq 2n - j (\leq 2n-2) \\ i \geq j - 2 (\geq 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq i \leq 2n-2 \\ 2 \leq j \\ j \leq n+1 \\ j \leq 2n-i \\ j \leq i+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq i \leq 2n-2 \\ 2 \leq j \\ j \leq \min(n+1, 2n-i, i+2) \end{cases}.$$

Ainsi, on obtient

$$\sum_{j=2}^{n+1} \sum_{i=j-2}^{2n-j} (i^2 + j^3) = \sum_{i=0}^{2n-2} \sum_{j=2}^{\min(n+1,2n-i,i+2)} (i^2+j^3) = \sum_{i=0}^{2n-2} \sum_{j=2}^{\min(2n-i,i+2)} (i^2+j^3)$$

où la dernière égalité est obtenue car si i appartient à l'ensemble $\{0, \ldots, n-1\}$, on a $\min(n+1, 2n-i, i+2) = i+2$, et si i appartient à l'ensemble $\{n, \ldots, 2n-2\}$, on a $\min(n+1, 2n-i, i+2) = 2n-i$. Ainsi, la somme peut être réécrite par

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=2}^{i+2} (i^2+j^3) + \sum_{i=n}^{2n-2} \sum_{j=2}^{2n-i} (i^2+j^3).$$

(b) Soit la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Solution : Démontrons-le par récurrence.
Cas de base ($n = 1$) :

$$D^1 = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 2^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que l'égalité considérée est vraie pour $n = 1$.

Cas de récurrence : Supposons l'égalité vraie pour $n \geq 1$ fixé [2], et montrons qu'elle l'est encore pour $n + 1$. Il vient

$$\begin{aligned} D^{n+1} = DD^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{(vu l'hyp. de réc.)} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} + 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

comme attendu, puisque $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.
En conclusion, l'égalité considérée est vraie $\forall n \geq 1$.

(3) (a) On considère le nombre dont l'écriture en base 2 est 10110010111011. Quelle est son écriture en base 8 ?

Solution : Puisque $8 = 2^3$, on peut directement obtenir l'écriture du nombre considéré en base 8 en coupant en blocs de 3 chiffres, en commençant par la droite, son écriture en base 2, soit 10|110|010|111|011, et en remplaçant chaque bloc par le nombre qu'il représente, soit 2|6|2|7|3.

(b) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{Z}_{35}$.

$$\begin{cases} 7x & + & 5y & = & 0 \\ -21x & + & 4y & = & -7 \end{cases}$$

Solution : Parmi les coefficients du système, 4 est le seul qui est inversible, puisqu'il est premier avec 35. Comme $9 \cdot 6 = 36 = 35 + 1$, son inverse dans $\mathbb{Z}_{35}$ est 9 et la seconde équation du système équivaut successivement à

$$\begin{aligned} -21x + 4y = -7 \quad &\Leftrightarrow \quad 4 \cdot_{35} y = 21x - 7 \\ &\Leftrightarrow \quad 9 \cdot_{35} 4 \cdot_{35} y = 9 \cdot_{35} (21x - 7) \\ &\Leftrightarrow \quad y = \mathrm{MOD}(9 \cdot 21, 35)x + \mathrm{MOD}(9 \cdot (-7), 35) \\ &\Leftrightarrow \quad y = 14x + 7 \end{aligned}$$

2. Et pour tout $n_0 \in \{1, \ldots, n\}$ si cela s'avère nécessaire...

En substituant y dans la première équation, on a alors successivement

$$\begin{aligned} 7x+5y=0 &\Leftrightarrow 7\cdot_{35}x+5\cdot_{35}(14x+7)=0\\ &\Leftrightarrow \mathrm{MOD}(77,35)x+\mathrm{MOD}(35,35)=0\\ &\Leftrightarrow 7\cdot_{35}x=0\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}\,:\,7x=35k\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}\,:\,x=5k \end{aligned}$$

Ainsi, on a finalement

$$y=7x+14=14\cdot_{35}5k+7=7$$

et l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}_{35}$ est donc donné par

$$S=\{(5k,7):k=0,\dots,6\}=\{(0,7),(5,7),(10,7),(15,7),(20,7),(25,7),(30,7)\}.$$

(4) On considère le système $S_{\alpha,\beta}$ suivant, dont les inconnues sont $x,y,z\in\mathbb{R}$, en fonction des paramètres réels α et β.

$$\begin{cases} 2\beta x+(1-2\beta)y+(1-2\beta)z=4\beta^2\\ \alpha x+(2-\alpha)y+\alpha z=1-2\beta\\ 2\beta x+(1+2\beta)y+(1+2\beta)z=2\beta-4\beta^2 \end{cases}\qquad (S_{\alpha,\beta})$$

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de α et β le système $S_{\alpha,\beta}$ est-il de Cramer ? Dans ce cas, est-il compatible ? Justifier.
Il est inutile de déterminer explicitement les solutions.

(b) Dans le(s) cas où $\alpha=1$ et où $S_{1,\beta}$ n'est pas de Cramer, discuter la compatibilité du système en fonction de β.

(c) Déterminer l'ensemble des solutions de $S_{1,\beta}$ dans les cas où $\beta=0$ et où $\beta=2$.

Solution :

(a) Matriciellement, le système $S_{\alpha,\beta}$ se réécrit $AX=B$ avec

$$A=\begin{pmatrix}2\beta & 1-2\beta & 1-2\beta\\ \alpha & 2-\alpha & \alpha\\ 2\beta & 1+2\beta & 1+2\beta\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\qquad \text{et}\qquad B=\begin{pmatrix}4\beta^2\\ 1-2\beta\\ 2\beta-4\beta^2\end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix}2\beta & 0 & 1-2\beta\\ \alpha & 2-2\alpha & \alpha\\ 2\beta & 0 & 1+2\beta\end{vmatrix} && (\ C_2\leftarrow C_2-C_3\ )\\ &=(2-2\alpha)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2\beta & 1-2\beta\\ 2\beta & 1+2\beta\end{vmatrix} && \begin{pmatrix}\text{1ère loi des mineurs}\\ \text{à la 2-ème colonne}\end{pmatrix}\\ &=(1-\alpha)16\beta^2\end{aligned}$$

de sorte que le système $S_{\alpha,\beta}$ est de Cramer lorsque $\alpha\neq 1$ et $\beta\neq 0$. Un système de Cramer étant toujours compatible, le système $S_{\alpha,\beta}$ le sera donc dans ce cas : il admettra une unique solution [3].

(b) Dans le cas où $\alpha=1$, le système n'est pas de Cramer quel que soit β, vu ce qui précède : il faut donc tester la compatibilité de $S_{1,\beta}$ pour tout $\beta\in\mathbb{R}$. Afin de tester la condition de compatibilité, appliquons l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée

$$(A|B)=\begin{pmatrix}2\beta & 1-2\beta & 1-2\beta & 4\beta^2\\ \alpha & 2-\alpha & \alpha & 1-2\beta\\ 2\beta & 1+2\beta & 1+2\beta & 2\beta-4\beta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\beta & 1-2\beta & 1-2\beta & 4\beta^2\\ 1 & 1 & 1 & 1-2\beta\\ 2\beta & 1+2\beta & 1+2\beta & 2\beta-4\beta^2\end{pmatrix}$$

3. Cette solution est $X=A^{-1}B$ quel que soient $\alpha\neq 1$ et $\beta\neq 0$.

pour en déterminer le rang (de même que celui de A) en fonction de β : il vient successivement

$$(A|B) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-2\beta \\ 2\beta & 1-2\beta & 1-2\beta & 4\beta^2 \\ 2\beta & 1+2\beta & 1+2\beta & 2\beta-4\beta^2 \end{pmatrix} \qquad \left(L_2 \leftrightarrow L_1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-2\beta \\ 0 & 1-4\beta & 1-4\beta & 8\beta^2-2\beta \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2\beta L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2\beta L_1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-2\beta \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8\beta^2-2\beta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - (1-4\beta)L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-2\beta \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta(4\beta-1) \end{pmatrix} \quad (\star) \qquad \left(L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \right)$$

Tout d'abord, on remarque que la matrice A est de rang égal à 2 quel que soit β (vu la matrice identité d'ordre 2 dans le coin supérieur gauche). Ensuite, on remarque que la matrice augmentée sera de rang 3 ssi $2\beta(4\beta-1) \neq 0$ [4], soit pour tout $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1/4\}$: dans ce cas, le système $S_{1\beta}$ est alors incompatible puisque $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A|B)$. Si par contre $\beta \in \{0, 1/4\}$, alors $\mathrm{rg}(A) = 2 = \mathrm{rg}(A|B)$, ce qui assure la compatibilité du système.

(c) Vu ce qui précède,

- si $\beta = 0$, le système est compatible et, tenant compte de $(\star)$, équivaut à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

de sorte que l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -y \end{pmatrix} \; : \; y \in \mathbb{R} \right\};$$

- si $\beta = 2$, le système est incompatible et $S = \emptyset$.

4. En effet, les deux premières colonnes de la dernière matrice, combinées à la dernière, donnent une matrice triangulaire supérieure de déterminant non nul puisque tous ses éléments diagonaux sont non nuls.