Abstract Numeration Systems: Recognizability, Decidability, S-automatic Sequences, and Real Numbers

Emilie Charlier

Département de Mathématiques
Université de Liège

7 décembre 2009

Plan de cet exposé

Un système de numération de position (SNP) est donné par une suite d'entiers $U = (U_i)_{i\geq 0}$ telle que

- $U_0 = 1$
- $\forall i \in \mathbb{N},\ U_i < U_{i+1}$
- $(U_{i+1}/U_i)_{i\geq 0}$ est borné $\quad\quad \rightarrow C_U = \sup_{i\geq 0} \lceil U_{i+1}/U_i \rceil$

La U-représentation gloutonne d'un entier positif n est l'unique mot $\mathrm{rep}_U(n) = c_\ell \cdots c_0$ sur $\Sigma_U = \{0, \ldots, C_U - 1\}$ satisfaisant

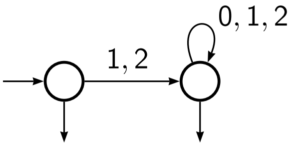
$$n = \sum_{i=0}^{\ell} c_i\, U_i,\ \ c_\ell \neq 0 \ \text{ et } \ \forall t = 0, \ldots, \ell,\ \sum_{i=0}^{t} c_i U_i < U_{t+1}.$$

$$\boxed{X \subseteq \mathbb{N}\ \textit{U-reconnaissable} \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow}\ \mathrm{rep}_U(X) \subseteq \Sigma_U^*\ \text{régulier}}$$

Numération en base entière $b \geq 2$

$$U_b = (b^i)_{i \geq 0} \qquad \Sigma_{U_b} = \{0, \cdots, b-1\}$$

$$\mathcal{L}_b = \mathrm{rep}_{U_b}(\mathbb{N}) = \Sigma_{U_b}^* \setminus 0\, \Sigma_{U_b}^*$$



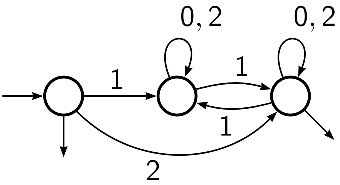
$\mathrm{rep}_{U_3}(\mathbb{N})$

27	9	3	1	
			ε	0
			1	1
			2	2
		1	0	3
		1	1	4
		1	2	5
		2	0	6
		2	1	7
		2	2	8
	1	0	0	9

Numération en base entière $b \geq 2$

$$U_b = (b^i)_{i \geq 0} \qquad \Sigma_{U_b} = \{0, \cdots, b-1\}$$

$$\mathcal{L}_b = \mathrm{rep}_{U_b}(\mathbb{N}) = \Sigma_{U_b}^* \setminus 0\,\Sigma_{U_b}^*$$



$\mathrm{rep}_{U_3}(2\,\mathbb{N})$

27	9	3	1	
			ε	0
			1	1
			2	2
		1	0	3
		1	1	4
		1	2	5
		2	0	6
		2	1	7
		2	2	8
	1	0	0	9

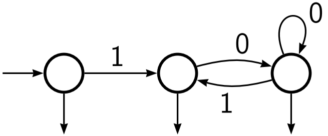
Numération de Fibonacci

Soit $F = (F_i)_{i\geq 0} = (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ défini par

$$F_0 = 1,\ \ F_1 = 2 \ \text{ et } \ \forall i \in \mathbb{N},\ \ F_{i+2} = F_{i+1} + F_i.$$

$\Sigma_F = \{0, 1\}$

Le facteur 11 est interdit :



$\mathrm{rep}_F(\mathbb{N}) = 1\{0, 01\}^* \cup \{\varepsilon\}$

13	8	5	3	2	1	
					ε	0
					1	1
				1	0	2
			1	0	0	3
			1	0	1	4
		1	0	0	0	5
		1	0	0	1	6
		1	0	1	0	7
	1	0	0	0	0	8

L'ensemble $\mathbb{N}$ est-il U-reconnaissable ? Autrement dit, le *langage de la numération* $\mathrm{rep}_U(\mathbb{N})$ est-il régulier ? Pas forcément :

Théorème (Shallit 1994)

Soit U un SNP. Si $\mathrm{rep}_U(\mathbb{N})$ est régulier, alors U satisfait une relation de récurrence linéaire à coefficients entiers.

Un SNP U est dit linéaire si U satisfait une relation de récurrence linéaire à coefficients entiers : il existe $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ ($k \geq 1$) tels que U satisfait

$$\forall i \in \mathbb{N},\ U_{i+k} = a_1 U_{i+k-1} + \cdots + a_k U_i.$$

Remarque

Loraud (1995) et Hollander (1998) ont donné des conditions suffisantes pour que le langage de la numération soit régulier : "le polynôme caractéristique de la relation de récurrence a une forme particulière".

Définition (Lecomte-Rigo 2001)

Un système de numération abstrait (SNA) est donné par un triplet $S = (L, \Sigma, <)$ où L est un langage régulier sur un alphabet totalement ordonné $(\Sigma, <)$.

En énumérant les mots de L dans l'ordre généalogique induit par $<$, on définit une bijection :

$$\mathsf{rep}_S : \mathbb{N} \to L \qquad \mathsf{val}_S = \mathrm{rep}_S^{-1} : L \to \mathbb{N}.$$

Exemple : $L = a^*$ $\quad \Sigma = \{a\}$

n	0	1	2	3	4	$\cdots$
$\mathsf{rep}\,(n)$	ε	a	aa	aaa	$aaaa$	$\cdots$

Exemple : $L = \{a, b\}^*$ $\quad \Sigma = \{a, b\}$ $\quad a < b$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$\mathrm{rep}\,(n)$	ε	a	b	aa	ab	ba	bb	aaa	$\cdots$

Exemple : $L = a^* b^*$ $\quad \Sigma = \{a, b\}$ $\quad a < b$

n	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$\mathrm{rep}\,(n)$	ε	a	b	aa	ab	bb	aaa	$\cdots$

Les numérations abstraites généralisent les numérations de position ayant un langage de la numération régulier :

Propriété

Soit U un SNP et soient $x, y \in \mathbb{N}$. On a

$$x < y \Leftrightarrow \mathrm{rep}_U(x) <_{gen} \mathrm{rep}_U(y).$$

Exemple : Fibonacci

$6 < 7$ et $1001 <_{gen} 1010$ (même longueur)
$6 < 8$ et $1001 <_{gen} 10000$ (longueurs différentes)

$\boxed{X \subseteq \mathbb{N}\ S\text{-reconnaissable} \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \mathrm{rep}_S(X) \subseteq \Sigma^* \text{ régulier.}}$

Quelques questions autour des numérations abstraites

- Ensembles rec. dans un SNA donné ?

Quelques questions autour des numérations abstraites

- Ensembles rec. dans un SNA donné ?
- Ensembles rec. dans tout SNA ?

Quelques questions autour des numérations abstraites

- Ensembles rec. dans un SNA donné ?
- Ensembles rec. dans tout SNA ?
- Y a-t-il des ensembles d'entiers qui ne sont jamais rec. ?

- Ensembles rec. dans un SNA donné ?
- Ensembles rec. dans tout SNA ?
- Y a-t-il des ensembles d'entiers qui ne sont jamais rec. ?
- Étant donné un ensemble d'entiers, peut-on construire un SNA pour lequel il est rec. ?

Quelques questions autour des numérations abstraites

- Ensembles rec. dans un SNA donné ?
- Ensembles rec. dans tout SNA ?
- Y a-t-il des ensembles d'entiers qui ne sont jamais rec. ?
- Étant donné un ensemble d'entiers, peut-on construire un SNA pour lequel il est rec. ?
- Pour quels SNA les opérations arithmétiques de base préservent la rec. ?

Quelques questions autour des numérations abstraites

- Ensembles rec. dans un SNA donné ?
- Ensembles rec. dans tout SNA ?
- Y a-t-il des ensembles d'entiers qui ne sont jamais rec. ?
- Étant donné un ensemble d'entiers, peut-on construire un SNA pour lequel il est rec. ?
- Pour quels SNA les opérations arithmétiques de base préservent la rec. ?
- Quelles sont les opérations qui préservent la rec. dans un SNA donné ?

Quelques questions autour des numérations abstraites

- Ensembles rec. dans un SNA donné ?
- Ensembles rec. dans tout SNA ?
- Y a-t-il des ensembles d'entiers qui ne sont jamais rec. ?
- Étant donné un ensemble d'entiers, peut-on construire un SNA pour lequel il est rec. ?
- Pour quels SNA les opérations arithmétiques de base préservent la rec. ?
- Quelles sont les opérations qui préservent la rec. dans un SNA donné ?
- Comment représenter les nombres réels ?

Quelques questions autour des numérations abstraites

- Ensembles rec. dans un SNA donné ?
- Ensembles rec. dans tout SNA ?
- Y a-t-il des ensembles d'entiers qui ne sont jamais rec. ?
- Étant donné un ensemble d'entiers, peut-on construire un SNA pour lequel il est rec. ?
- Pour quels SNA les opérations arithmétiques de base préservent la rec. ?
- Quelles sont les opérations qui préservent la rec. dans un SNA donné ?
- Comment représenter les nombres réels ?
- Les suites automatiques peuvent-elles êtres définies dans ce contexte ?

- Ensembles rec. dans un SNA donné ?
- Ensembles rec. dans tout SNA ?
- Y a-t-il des ensembles d'entiers qui ne sont jamais rec. ?
- Étant donné un ensemble d'entiers, peut-on construire un SNA pour lequel il est rec. ?
- Pour quels SNA les opérations arithmétiques de base préservent la rec. ?
- Quelles sont les opérations qui préservent la rec. dans un SNA donné ?
- Comment représenter les nombres réels ?
- Les suites automatiques peuvent-elles êtres définies dans ce contexte ?
- Caractérisation logique des ensembles rec. ?

Quelques questions autour des numérations abstraites

- Ensembles rec. dans un SNA donné ?
- Ensembles rec. dans tout SNA ?
- Y a-t-il des ensembles d'entiers qui ne sont jamais rec. ?
- Étant donné un ensemble d'entiers, peut-on construire un SNA pour lequel il est rec. ?
- Pour quels SNA les opérations arithmétiques de base préservent la rec. ?
- Quelles sont les opérations qui préservent la rec. dans un SNA donné ?
- Comment représenter les nombres réels ?
- Les suites automatiques peuvent-elles êtres définies dans ce contexte ?
- Caractérisation logique des ensembles rec. ?
- ...

Conservation de la reconnaissabilité par opérations arithmétiques

Translation

Théorème (Lecomte-Rigo 2001)

Soient $S = (L, \Sigma, <)$ *un SNA et* $X \subseteq \mathbb{N}$. *On a*

$$\forall t \in \mathbb{N},\ X \text{ est } S\text{-reconnaissable} \Leftrightarrow X + t \text{ est } S\text{-reconnaissable.}$$

Multiplication par une constante

Soit $S = (L, \Sigma, <)$ un SNA. Soient

- $X \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble S-reconnaissable ;
- λ un entier positif.

Que peut-on dire de la S-reconnaissabilité de $\lambda X = \{\lambda x \mid x \in X\}$?

La fonction de complexité $\mathbf{u}_L(n)$ d'un langage L compte le nombre de mots de longueur n appartenant à L.

Un langage est exponentiel si on a $\mathbf{u}_L(n) = \Omega(\theta^n)$ avec $\theta > 1$ et est polynomial si on a $\mathbf{u}_L(n) = O(n^k)$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Théorème (Szilard-Yu-Zhang-Shallit 1992)

Un langage régulier est soit polynomial soit exponentiel.

Les langages de numération "habituels" sont exponentiels.

$\longrightarrow$ QUESTION : Que se passe-t-il si L est polynomial ?

Un langage L est slender si $\mathbf{u}_L(n)$ est $O(1)$.

Théorème (Cas slender, C.-R.-S. 2008)

Soit S un SNA construit sur un langage slender et soit $X \subseteq \mathbb{N}$. On a

$$X \text{ est } S\text{-reconnaissable} \Leftrightarrow X \text{ est ultimement périodique.}$$

Corollaire

Soit S un SNA construit sur un langage slender. Alors la multiplication par une constante préserve la S-reconnaissabilité :

$$X \subseteq \mathbb{N} \text{ est } S\text{-reconnaissable} \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{N},\ \lambda X \text{ est } S\text{-reconnaissable.}$$

Théorème (Cas polynomial, Rigo 2001)

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage régulier tel que $\mathbf{u}_L(n)$ est $\Theta(n^k)$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et soit $S = (L, \Sigma, <)$. Si la multiplication par une constante λ préserve la S-reconnaissabilité, alors on a

$$\exists \beta \in \mathbb{N},\ \lambda = \beta^{k+1}.$$

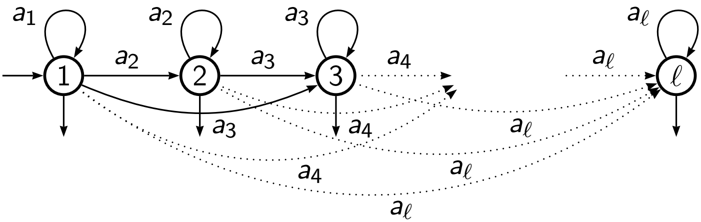
Théorème (Lecomte-Rigo 2001)

Soient $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $S = (a^* b^*, \{a, b\}, a < b)$. La multiplication par β^2 préserve la S-reconnaissabilité ssi β est impair.

$\longrightarrow$ On se concentre sur les langages bornés : $a_1^* \cdots a_\ell^*$.

Langages bornés

$$S_\ell = (a_1^* \cdots a_\ell^*, \{a_1, \ldots, a_\ell\}, a_1 < \cdots < a_\ell)$$



$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\times\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{rep}_{S_\ell}"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "\mathrm{rep}_{S_\ell}"] \\
a_1^* \cdots a_\ell^* \arrow[r, "f_\lambda"'] & a_1^* \cdots a_\ell^*
\end{tikzcd}$$

$$f_\lambda(w) = w' \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \mathrm{val}_{S_\ell}(w') = \lambda \, \mathrm{val}_{S_\ell}(w)$$

Lemme

$$\forall n \geq 0,\ \mathbf{u}_{a_1^* \cdots a_\ell^*}(n) = \binom{n+\ell-1}{\ell-1}.$$

Remarques :

1. Un candidat pour chaque degré ℓ : $\mathbf{u}_{a_1^* \cdots a_\ell^*}(n) = \Theta(n^{\ell-1})$.
2. On se concentre sur les constantes de la forme $\lambda = \beta^\ell$.

Proposition (C.-R.-S. 2008)

Pour tous $\ell \geq 3$ et $\beta \geq 2$, la multiplication par β^ℓ ne préserve pas la S_ℓ-reconnaissabilité :

$$\exists L \subseteq a_1^* \cdots a_\ell^*,\ L \text{ est régulier et } f_{\beta^\ell}(L) \text{ n'est pas régulier.}$$

- Principe : Montrer qu'on a toujours $f_{\beta^\ell}(a_\ell^*)$ ou $f_{\beta^\ell}(a_1^* a_\ell^*)$ non régulier.

Proposition (C.-R.-S. 2008)

Pour tous $\ell \geq 3$ et $\beta \geq 2$, la multiplication par β^ℓ ne préserve pas la S_ℓ-reconnaissabilité :

$$\exists L \subseteq a_1^* \cdots a_\ell^*,\ L \text{ est régulier et } f_{\beta^\ell}(L) \text{ n'est pas régulier.}$$

- Principe : Montrer qu'on a toujours $f_{\beta^\ell}(a_\ell^*)$ ou $f_{\beta^\ell}(a_1^* a_\ell^*)$ non régulier.

Théorème (C.-R.-S. 2008)

La multiplication par $\lambda \geq 2$ préserve la S_ℓ-reconnaissabilité ssi une des conditions suivantes est satisfaite :

- $\ell = 1$;
- $\ell = 2$ et λ est un carré impair.

Un problème de décision

Théorème (Lecomte-Rigo 2001)

Tout ensemble $X \subseteq \mathbb{N}$ ultimement périodique est S-reconnaissable pour tout S et on peut construire un AFD qui accepte $\mathrm{rep}_S(X)$.

Deux entiers $k, \ell \geq 2$ sont multiplicativement indépendants si

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ \ k^m = \ell^n \Rightarrow\ m = n = 0.$$

Théorème (Cobham 1969)

Soient $b, b' \geq 2$ des entiers multiplicativement indépendants.

$\forall X \subseteq \mathbb{N}$, X *U_b et $U_{b'}$-reconnaissable* $\Rightarrow$ X *ultimement périodique.*

$\longrightarrow$ QUESTION : Étant donné un SNA S, peut-on décider si un ensemble S-reconnaissable $X \subseteq \mathbb{N}$ est ultimement périodique ?

THÉORÈME (HONKALA 1985)

Soit un entier $b \geq 2$. On peut décider si un ensemble U_b-reconnaissable est ultimement périodique.

Procédure de décision d'Honkala :

- Entrée : AFD $\mathcal{A}_X$ acceptant $\text{rep}_{U_b}(X)$
- Borner les périodes et prépériodes possibles en fonction du nombre d'états de $\mathcal{A}_X$
- Nombre fini de candidats à tester
- Pour chaque couple (a, p) de candidats, construire des AFD pour tous les ensembles ultimement périodiques correspondant
- Comparer avec $\mathcal{A}_X$

Proposition

Soit $U = (U_i)_{i \geq 0}$ un SNP tel que $\mathbb{N}$ est U-reconnaissable. Tout ensemble $X \subseteq \mathbb{N}$ ultimement périodique est U-reconnaissable et on peut construire un AFD qui accepte $\mathrm{rep}_U(X)$.

$\longrightarrow$ QUESTION : Étant donnée une numération linéaire U, peut-on décider si un ensemble U-reconnaissable $X \subseteq \mathbb{N}$ est ou non ultimement périodique ?

Théorème (Muchnik 1991)

Soit U un système de numération linéaire pour lequel $\mathbb{N}$ et l'addition sont reconnaissables. On peut décider si un ensemble U-reconnaissable est ultimement périodique.

Résultat souhaité

Soit X un ensemble ultimement périodique de période p_X.

Tout AFD acceptant $\mathrm{rep}_U(X)$ a au moins $f(p_X)$ états,
où f est une fonction croissante.

Corollaire souhaité

Soit $X \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble U-reconnaissable tel que $\mathrm{rep}_U(X)$ est accepté par $\mathcal{A}_X$ avec k états.

Si X est ultimement périodique de période p, alors

$$\boxed{f(p) \leq k} \quad \text{avec} \begin{cases} k \text{ fixé} \\ f \text{ croissant.} \end{cases}$$

$\rightarrow$ Le nombre de candidats pour p est borné supérieurement.

Une hypothèse technique :

$$\lim_{i \to +\infty} U_{i+1} - U_i = +\infty. \tag{1}$$

Les SNP les plus courants sont construits sur une suite $(U_i)_{i \geq 0}$ exponentielle.

$N_U(m) \in \{1, \ldots, m\}$ désigne le nombre de valeurs prises infiniment souvent par la suite $(U_i \bmod m)_{i \geq 0}$.

Exemple : Fibonacci

$(F_i \bmod 4) = (1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 2, 3, \ldots)$ et $N_F(4) = 4$.
$(F_i \bmod 11) = (1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1, 2, 3, \ldots)$ et $N_F(11) = 7$.

Proposition

Soient $U = (U_i)_{i \geq 0}$ un SNP satisfaisant (1) et $X \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble ultimement périodique de période p_X. Tout AFD acceptant $\mathrm{rep}_U(X)$ a au moins $N_U(p_X)$ états.

Corollaire

Soit $U = (U_i)_{i \geq 0}$ un SNP satisfaisant (1) et

$$\lim_{m \to +\infty} N_U(m) = +\infty.$$

La période d'un ensemble ultimement périodique $X \subseteq \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{rep}_U(X)$ est accepté par un AFD de d états est bornée par le plus petit entier M tel que pour tout $m \geq M$, on a $N_U(m) > d$. De plus, cette borne est calculable effectivement.

Pour toute suite d'entiers $U = (U_i)_{i \geq 0}$ telle que $(U_i \bmod m)_{i \geq 0}$ est ultimement périodique, $\iota_U(m)$ désigne la plus petite prépériode de $(U_i \bmod m)_{i \geq 0}$.

Proposition

Soient $U = (U_i)_{i \geq 0}$ une numération linéaire et $X \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble ultimement périodique de période p_X et de prépériode a_X. Tout AFD acceptant $\mathrm{rep}_U(X)$ a au moins $|\mathrm{rep}_U(a_X - 1)| - \iota_U(p_X)$ états.

Théorème (B.-C.-F.-R. 2008)

Soit $U = (U_i)_{i \geq 0}$ *une numération linéaire telle que* $\mathbb{N}$ *est* U*-reconnaissable, satisfaisant* (1) *et*

$$\lim_{m \to +\infty} N_U(m) = +\infty.$$

On peut décider si un ensemble U*-reconnaissable est ultimement périodique.*

Exemple

Soit $U = (U_i)_{i \geq 0}$ une suite d'entiers croissante satisfaisant

$$\forall i \geq 0,\ U_{i+k} = a_1 U_{i+k-1} + \cdots + a_k U_i,\ \text{avec } a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}.$$

Si on a $a_k = \pm 1$, alors on a $N_U(m) \to +\infty$.

Remarque

Lorsqu'on a $\mathrm{pgcd}(a_1, \ldots, a_k) = g \geq 2$*, alors on a*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \textit{ suffisamment grand},\ U_i \equiv 0 \bmod g^n$$

et donc $N_U(m) \not\to +\infty$*.*

Exemples

- Bases entières : $U_{n+1} = k\,U_n$
- $U_{n+2} = 2U_{n+1} + 2U_n$

$$a, b, 2(a+b), 2(2a+3b), 4(3a+4b), 4(8a+11b) \ldots$$

Exemple : addition non reconnaissable

Soit $U = (U_i)_{i \geq 0} = (1, 2, 3, 4, 21, 77, \ldots)$ définie par

$$\forall i \in \mathbb{N},\ U_{i+4} = 3U_{i+3} + 2U_{i+2} + 3U_i \text{ et } \forall i \in [\![0, 3]\!],\ U_i = i + 1.$$

Frougny a montré que l'addition n'est pas calculable par automate fini dans ce système.

On peut montrer que $N_U(m) \to +\infty$ lorsque $m \to +\infty$.

Représentation des réels

La représentation décimale de $\frac{11}{13}$ est $0.(846153)^\omega$:

$$\frac{8}{10}, \frac{84}{100}, \frac{846}{1000}, \frac{8461}{10000}, \frac{84615}{100000}, \dots$$

Définition : $\forall L \subseteq \Sigma^*,\ \mathbf{v}_L(n) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{u}_L(i) = \mathrm{Card}(L \cap \Sigma^{\leq n})$

Remarque (En base entière $b \geq 2$)

$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{v}_{\mathcal{L}_b}(n) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{u}_{\mathcal{L}_b}(i) = b^n.$

$$n^e \text{ fraction } = \frac{\mathrm{val}_{U_{10}}(\text{préfixe de longueur } n \text{ de } (846153)^\omega)}{\mathbf{v}_{\mathcal{L}_{10}}(n)}$$

La représentation binaire de $\frac{11}{13}$ est $0.(110110001001)^\omega$:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4} = \frac{6}{8}, \frac{13}{16}, \frac{27}{32} = \frac{54}{64} = \frac{108}{128} = \frac{216}{256}, \frac{433}{512} = 0.845703125, \dots$$

$$n^e \text{ fraction } = \frac{\mathrm{val}_{U_2}(\text{préfixe de longueur } n \text{ de } (110110001001)^\omega)}{\mathbf{v}_{\mathcal{L}_2}(n)}$$

$$7^e \text{ fraction : } 108 = 64 + 32 + 8 + 4 = \mathrm{val}_{U_2}(1101100)$$
$$128 = 2^7 = \mathbf{v}_{\mathcal{L}_2}(7).$$

Idée de Lecomte et Rigo

$$S = (L, \Sigma, <) \qquad w \in \Sigma^\omega$$

$$(w^{(n)})_{n\geq 0} \in L^{\mathbb{N}}, \qquad w^{(n)} \to w \text{ si } n \to +\infty$$

Montrer que, sous certaines hypothèses, la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{val}_S(w^{(n)})}{\mathbf{v}_L(|w^{(n)}|)} \text{ existe et ne dépend que de } w.$$

Dans ce cas, w est une S-représentation du réel correspondant.

$\longrightarrow$ QUESTION : Et si L n'est pas régulier ?

Exemple

Les numérations en base $\frac{3}{2}$ introduites par Akiyama, Frougny et Sakarovitch (2008) ont un langage de numération non-algébrique.

- L = langage infini quelconque (pas nécessairement régulier)
- Automate minimal de L : $\mathcal{A}_L = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- $S = (L, \Sigma, <) \longrightarrow$ système abstrait "généralisé" :

$$\forall x \in L,\ \mathrm{val}_S(x) = \mathbf{v}_{q_0}(|x|-1) + \sum_{i=0}^{|x|-1} \sum_{a<x[i]} \mathbf{u}_{q_0 \cdot x[0,i-1]a}(|x|-i-1),$$

où $x[0, i-1]$ désigne le préfixe de longueur i de x.

- w = limite de mots de $L \Leftrightarrow w \in \mathrm{Adh}(L)$

$$\mathrm{Adh}(L) = \{w \in \Sigma^\omega \mid \mathrm{Pref}(w) \subseteq \mathrm{Pref}(L)\}$$

Remarque

Comme on a toujours $\mathrm{Adh}(L) = \mathrm{Adh}(\mathrm{Pref}(L))$*, il n'y a pas de nouvelle représentation si on demande que L soit préfixiel.*

- (H1) Adh(L) non dénombrable

$\longrightarrow$ QUESTION : Quelles conditions sur L assurent que la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{val}_S(w[0, n-1])}{\mathbf{v}_L(n)} \quad \text{existe ?}$$

BUT : Définir des intervalles d'approximations des réels : la longueur diminue au fur et à mesure que le préfixe lu devient de plus en plus long

$$\forall x \in L \cap \Sigma^n,\ \underbrace{\frac{\mathbf{v}_L(n-1)}{\mathbf{v}_L(n)}}_{=1-\frac{\mathbf{u}_L(n)}{\mathbf{v}_L(n)}} \leq \frac{\mathrm{val}_S(x)}{\mathbf{v}_L(n)} \leq \underbrace{\frac{\mathbf{v}_L(n)}{\mathbf{v}_L(n)}}_{=1}$$

- (H2) $\forall x \in \Sigma^*,\ \exists r_x \geq 0,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{u}_{q_0\cdot x}(n-|x|)}{\mathbf{v}_{q_0}(n)} = r_x$

$\longrightarrow$ intervalle représenté $= I_\varepsilon = [1 - r_\varepsilon, 1]$

En général : $|I_x| = r_x$

$$x \notin \mathrm{Centre}(L) \Leftrightarrow r_x = 0,\ \text{avec } \mathrm{Centre}(L) = \mathrm{Pref}(\mathrm{Adh}(L))$$

- (H3) $\forall w \in \mathrm{Adh}(L),\ \lim_{\ell\to+\infty} r_{w[0,\ell-1]} = 0$

Les conditions suivantes sur L assurent que la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{val}_S(w[0, n-1])}{\mathbf{v}_L(n)} \text{ existe :}$$

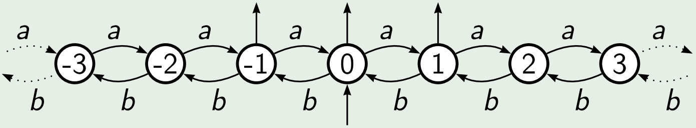
- (H1) Adh(L) non dénombrable
- (H2) $\forall x \in \Sigma^*, \; \exists r_x \geq 0, \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbf{u}_{q_0 \cdot x}(n-|x|)}{\mathbf{v}_{q_0}(n)} = r_x$
- (H3) $\forall w \in \mathrm{Adh}(L), \lim_{\ell \to +\infty} r_{w[0,\ell-1]} = 0$

+ L préfixiel !

EXEMPLE : $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid ||w|_a - |w|_b| \leq 1\}$

$$L = \{\varepsilon, a, b, ab, ba, aab, aba, abb, baa, bab, bba, aabb, \ldots\}$$

$$S = (L, \{a,b\}, a < b)$$



$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{val}_S((ab)^n)}{\mathbf{v}_0(2n)} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{val}_S((ab)^n a)}{\mathbf{v}_0(2n+1)} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{val}_S((ab)^\omega[0, n-1])}{\mathbf{v}_0(n)} \text{ n'existe pas.}$$

L non préfixiel : $\mathrm{Pref}(L) = \{a,b\}^*$

Pour tout $w \in \mathrm{Adh}(L)$,

$$\mathrm{val}_S(w) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{val}_S(w[0, n-1])}{\mathbf{v}_L(n)}$$

est la valeur numérique de w.
Le mot infini w est une S-représentation de $\mathrm{val}_S(w)$.

Proposition (C.-Le G.-R. 2009)

Soit $L \subseteq \Sigma^*$, $S = (\mathrm{Pref}(L), \Sigma, <)$ un SNA (généralisé). Si $\mathrm{Pref}(L)$ satisfait (H1), (H2) et (H3), alors pour toute suite $(w^{(n)})_{n \geq 0} \in L^{\mathbb{N}}$ convergeant vers un mot $w \in \mathrm{Adh}(L)$, on a

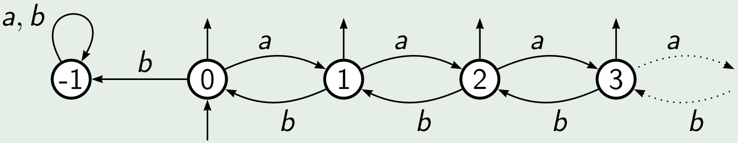
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{val}_S(w^{(n)})}{\mathbf{v}_{\mathrm{Pref}(L)}(|w^{(n)}|)} = \mathrm{val}_S(w).$$

Exemple : Préfixes des mots de Dyck

$D = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b \text{ et } \forall u \in \mathrm{Pref}(w),\ |u|_a \geq |u|_b\}$

non préfixiel $\longrightarrow$ on considère $S = (\mathrm{Pref}(D), \{a,b\}, a < b)$

$$\begin{aligned}\mathrm{Pref}(D) &= \{w \in \{a,b\}^* \mid \forall u \in \mathrm{Pref}(w),\ |u|_a \geq |u|_b\} \\ &= \{\varepsilon, a, aa, ab, aaa, aab, aba, aaaa, aaab, aaba, aabb, \ldots\}.\end{aligned}$$



Exemple : Préfixes des mots de Dyck (suite)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{val}_S((aab)^\omega[0, n-1])}{\mathbf{v}_L(n)} = \frac{39}{49} = 0.795918 \cdots$$

x	$\mathrm{val}_S(x)$	$\mathbf{v}_L(\lvert x \rvert)$	$\frac{\mathrm{val}_S(x)}{\mathbf{v}_L(\lvert x \rvert)}$
a	1	2	0.50000
aa	2	4	0.50000
aab	5	7	0.71429
$aaba$	9	13	0.69231
$aabaa$	17	23	0.73913
$aabaab$	32	43	0.74419
$aabaaba$	60	78	0.76923
$aabaabaa$	112	148	0.75676
$aabaabaab$	213	274	0.77737
$aabaabaaba$	404	526	0.76806
$aabaabaabaa$	771	988	0.78036

Exemple : Préfixes des mots de Dyck (suite)

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{v}_L(n-1)}{\mathbf{v}_L(n)} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ on représente l'intervalle $I_\varepsilon = [\frac{1}{2}, 1]$

Centre(Pref(D)) = Pref(D) :

- $I_a = [1/2, 1]$
- $I_{aa} = [1/2, 7/8]$ $I_{ab} = [7/8, 1]$
- $I_{aaa} = [1/2, 3/4]$ $I_{aab} = [3/4, 7/8]$ $I_{aba} = [7/8, 1]$
- ...

Exemple : Préfixes des mots de Dyck (suite)

$\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$, Q_x désigne l'ensemble des représentations de x

$$Q_{1/2} = \{a^\omega\} \text{ et } Q_1 = \{(ab)^\omega\},$$
$$x \in]1/2, 1[\text{ point frontière } \Rightarrow Q_x = \{\bar{w}(ab)^\omega, za^\omega\},$$

où $x = \sup I_w = \inf I_z$,
$\bar{w}$ = le plus petit mot de Dyck ayant w comme préfixe.

Proposition (C.-Le G.-R. 2009)

Si L est algébrique, alors les représentations des bornes des intervalles sont ultimement périodiques.