GROUPE 1

EXAMEN ÉCRIT : MAI 2017

Consignes : Cette partie dure 3 heures. À la fin de l'examen, envoyer au moyen de votre adresse ULg vos différents fichiers aux trois adresses suivantes : echarlier@ulg.ac.be, beatrice.lahaye@ulg.ac.be et tkleyntssens@ulg.ac.be. L'accès à internet et à vos notes de cours est autorisé mais aucun moyen de communication (messagerie, téléphone, e-mail, ...) ne sera toléré durant l'examen. Toute transgression de cette dernière règle sera sanctionnée par une cote de 0/20.

Exercice 1. Répondre à l'aide de mathematica ou python-sympy.

1. Trouver l'équation de l'ellipse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
passant par les points de coordonnées $(1, \sqrt{20}/3)$ et $(-1/2, -\sqrt{32}/3)$.
2. Trouver l'équation de la tangente à l'ellipse au point de coordonnées $(1, \sqrt{20}/3)$.
Rappel : La tangente d'une fonction dérivable f au point de coordonnées $(a, f(a))$ a pour coefficient angulaire $Df(a)$.
3. Représenter l'ellipse obtenue.

Exercice 2. Répondre à l'aide de mathematica ou python-sympy.
Un couple de nombres entiers (p, q) est appelé un *couple de nombres premiers jumeaux* si p et q sont premiers et $q = p + 2$. Écrire une fonction prenant pour argument un entier positif N et renvoyant la liste des N premiers couples de nombres premiers jumeaux.

Exercice 3. Répondre à l'aide de mathematica ou python-sympy.
L'interprétation de Riemann de l'intégrale affirme que pour toute fonction f continue sur l'intervalle $[0, 1]$, on a
$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} S(n)$$
où
$$S(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right).$$
En d'autres termes, $S(n)$ *approxime* l'intégrale lorsque n est suffisamment grand. Dans le cas où f est la fonction définie par
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$
écrire une fonction qui calcule $S(n)$. Pour $n = 100$, calculer l'erreur due à l'approximation, i.e.
$$\left|\int_0^1 f(x)\, dx - S(100)\right|.$$

Exercice 4. Répondre à l'aide de mathematica ou python-sympy.
On considère une matrice carrée $A \in \mathbb{C}^n_n$. On dit d'un vecteur colonne v non nul qu'il est un vecteur propre de valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de la matrice A si $Av = \lambda v$. Déterminer un vecteur propre de la matrice A donnée ci-dessous ainsi que la valeur propre qui lui est associée.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Répondre à l'aide de mathematica ou python-sympy.
Une matrice de Vandermonde est une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

pour des réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Écrire une fonction prenant en argument une liste de réels $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ et renvoyant la matrice de Vandermonde associée à ces réels.

Exercice 6. Le fichier "groupe1.ods" reprend une liste de prix.

1. Ajouter une colonne calculant la TVA de chaque produit.
2. Calculer la somme des prix hors TVA.
3. Calculer le nombre de produits qui soit viennent de Chine, soit ont un prix supérieur à 15 euros HTVA.

Exercice 7. Dans un espace affine euclidien de dimension 2, on donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon R et de diamètre $[A, B]$. Soit M un point de $\mathcal{C}$ et H sa projection orthogonale sur AB. Représenter la courbe décrite par la projection orthogonale de H sur la tangente au cercle en M lorsque M décrit le cercle.

GROUPE 2

EXAMEN ÉCRIT : MAI 2017

Consignes : Cette partie dure 3 heures. À la fin de l'examen, envoyer au moyen de votre adresse ULg vos différents fichiers aux trois adresses suivantes : echarlier@ulg.ac.be, beatrice.lahaye@ulg.ac.be et tkleyntssens@ulg.ac.be. L'accès à internet et à vos notes de cours est autorisé mais aucun moyen de communication (messagerie, téléphone, e-mail, ...) ne sera toléré durant l'examen. Toute transgression de cette dernière règle sera sanctionnée par une cote de 0/20.

Exercice 1. Répondre à l'aide de mathematica ou python-sympy.

1. Trouver l'équation de l'hyperbole
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
passant par le point de coordonnées $(6, \sqrt{75}/4)$ et admettant comme asymptote oblique la droite d'équation $y = \frac{5}{6}x$.
Rappel : L'hyperbole admet deux asymptotes obliques d'équations $y = \pm\frac{b}{a}x$.
2. Trouver l'équation de la tangente à l'hyperbole au point de coordonnées $(6, \sqrt{75}/4)$.
Rappel : La tangente d'une fonction dérivable f au point de coordonnées $(a, f(a))$ a pour coefficient angulaire $Df(a)$.
3. Représenter l'hyperbole obtenue.

Exercice 2. Répondre à l'aide de mathematica ou python-sympy.
Un nombre premier est dit *de Pythagore* si c'est un nombre premier de la forme $4n + 1$ avec n un nombre entier. Écrire une fonction prenant pour argument un entier positif N et renvoyant la liste des N premiers nombres premiers de Pythagore.

Exercice 3. Répondre à l'aide de mathematica ou python-sympy.
Considérons la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{N\to+\infty} S(N)$$
où
$$S(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}.$$
En d'autres termes, $S(N)$ *approxime* la valeur de la série lorsque N est suffisamment grand. Écrire une fonction qui calcule $S(N)$. Pour $N = 100$, calculer l'erreur due à l'approximation, i.e.
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - S(100)\right|.$$

Exercice 4. Répondre à l'aide de mathematica ou python-sympy.
On considère une matrice carrée $A \in \mathbb{C}_n^n$. On dit d'un vecteur colonne v non nul qu'il est un vecteur propre de valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de la matrice A si $Av = \lambda v$. Déterminer un vecteur propre de la matrice A donnée ci-dessous ainsi que la valeur propre qui lui est associée.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Répondre à l'aide de mathematica ou python-sympy.
On s'intéresse aux matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 2\alpha_1 & \dots & (n-1)\alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 & 2\alpha_2 & \dots & (n-1)\alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 & 2\alpha_3 & \dots & (n-1)\alpha_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha_n & 2\alpha_n & \dots & (n-1)\alpha_n \end{pmatrix}$$

pour des réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Écrire une fonction prenant en argument une liste de réels $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ et renvoyant la matrice associée à ces réels.

Exercice 6. Le fichier "groupe2.ods" reprend les résultats d'une enquête socio-économique.

1. Ajouter une colonne indiquant pour chaque personne de l'enquête si oui ou non il a une famille nombreuse (i.e. au moins 3 enfants).
2. Calculer la médiane du nombre d'enfants par personne de l'enquête.
3. Affichez simultanément la liste de toutes les lignes qui correspondent à des personnes ayant deux enfants ou plus ainsi que toutes les lignes correspondant à des personnes ayant obtenu un diplôme entre 1992 et 1995.

Exercice 7. Dans un espace affine euclidien de dimension 2, on donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de diamètre $[A, B]$. Par A, on mène un sécante $\mathcal{D}$ au cercle $\mathcal{C}$ et à la tangente au cercle au point B. On désigne respectivement par M et N les points d'intersection de $\mathcal{D}$ avec le cercle et la tangente. Représenter la courbe engendrée par le point P tel que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MN}$.

GROUPE 1

EXAMEN ÉCRIT : AOÛT 2017

Consignes : Cette partie dure 3 heures. À la fin de l'examen, envoyer au moyen de votre adresse ULg vos différents fichiers aux trois adresses suivantes : echarlier@ulg.ac.be, beatrice.lahaye@ulg.ac.be et tkleyntssens@ulg.ac.be. L'accès à internet et à vos notes de cours est autorisé mais aucun moyen de communication (messagerie, téléphone, e-mail, ...) ne sera toléré durant l'examen. Toute transgression de cette dernière règle sera sanctionnée par une cote de 0/20.

Exercice 1. Répondre à l'aide de mathematica ou python-sympy.

1. Trouver l'équation de l'hyperbole
$$\mathcal{H} \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$
passant par les points de coordonnées $(1, 2\sqrt{41}/15)$ et $(-2/3, 34/35)$.
2. Trouver l'équation de la tangente à $\mathcal{H}$ au point $P \in \mathcal{H}$ ayant $1/2$ comme abscisse et une ordonnée négative.
Rappel : La tangente d'une fonction dérivable f au point de coordonnées $(a, f(a))$ a pour coefficient angulaire $Df(a)$.
3. Représenter l'hyperbole obtenue.

Exercice 2. Répondre à l'aide de mathematica ou python-sympy.
Écrire une fonction prenant pour argument un entier positif N et renvoyant la somme des N premiers nombres premiers.

Exercice 3. Répondre à l'aide de mathematica ou python-sympy.
Il est possible de montrer que
$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx = \lim_{n\to+\infty} T(n)$$
où
$$T(n) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-(k/n)^2} - e^{-((k+1)/n)^2}.$$
En d'autres termes, $T(n)$ *approxime* l'intégrale lorsque n est suffisamment grand. En admettant ce résultat, répondre aux questions suivantes.

1. Ecrire une fonction qui calcule $T(n)$.
2. Montrer l'évolution de l'erreur due à l'approximation pour n variant entre 1 et 100, i.e. faire le graphique de la fonction
$$n \mapsto \left| \int_0^1 e^{-x^2}\, dx - T(n) \right|.$$

Exercice 4. Soit m un paramètre réel. Résoudre le système linéaire $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Écrire une fonction qui détermine si une matrice carrée donnée est symétrique ou non.

Exercice 6. Le fichier "ecritAout2017.ods" reprend une liste de résultats pour 4 parcours d'une randonnée se déroulant sur plusieurs jours.

1. Ajouter 4 feuilles ayant pour nom les différents parcours, à savoir blanc, bleu, noir et rouge. Pour chacune d'entre-elles, mettre uniquement la liste des résultats du parcours correspondant. Calculer la médiane du temps pour chaque parcours.
2. En utilisant qu'une seule fonction, calculer le nombre de parcours blanc et bleu fait entre le 16 décembre et le 18 décembre.

Exercice 7. Dans un espace affine euclidien de dimension 2, on donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et A un point de $\mathcal{C}$. Un point M décrit $\mathcal{C}$. Représenter le lieu de l'orthocentre du triangle AOM lorsque le point M décrit $\mathcal{C}$.

GROUPE 1

EXAMEN ÉCRIT : JUIN 2018

Consignes : Cette partie dure 3 heures. À la fin de l'examen, envoyer au moyen de votre adresse ULiège vos différents fichiers aux trois adresses suivantes : echarlier@uliege.be, beatrice.lahaye@uliege.be et tkleyntssens@uliege.be. L'accès à internet et à vos notes de cours est autorisé mais aucun moyen de communication (messagerie, téléphone, e-mail, ...) ne sera toléré durant l'examen. Toute transgression de cette dernière règle sera sanctionnée par une cote de 0/20.

Le choix du logiciel avec lequel vous répondez à chaque question est libre, néanmoins chacun des logiciels vus en cours (Mathematica, Python, Geogebra et Calc) doit au minimum être utilisé pour répondre à une question dans son intégralité.

Exercice 1. Dans un espace affine euclidien de dimension 2, on considère une ellipse $\mathcal{E}$ de centre O et un point $A \in \mathcal{E}$. On nomme respectivement $\mathcal{T}$ et $\mathcal{N}$ les droites tangente et normale à l'ellipse en A. Soit M l'intersection de $\mathcal{N}$ avec la parallèle à $\mathcal{T}$ passant par O. Représenter la courbe engendrée par le point M lorsque A décrit $\mathcal{E}$.

Exercice 2. Une matrice circulante est une matrice carrée dans laquelle on passe d'une ligne à la suivante par permutation circulaire (décalage vers la droite) des coefficients.

Un exemple de matrice circulante est donné par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 \\ 8 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Implémenter une fonction qui détermine si, oui ou non, une matrice carrée est circulante.

Exercice 3. Étant donné une liste de nombres premiers l et un naturel n. Rédiger un algorithme qui rend le nombre de naturels inférieurs ou égaux à n n'étant pas divisibles par un (ou plusieurs) nombre(s) de la liste l. Implémenter ensuite cet algorithme et le tester lorsque $n = 300$ en générant une liste aléatoire de 5 nombres premiers inférieurs à 300.

Exercice 4. Déterminer les coordonnées des points d'intersections des courbes d'équations paramétriques

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \pi t \\ y & = & 2t^2 - 3t + 4 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 4r + 1 \\ y & = & 4 - 2r \end{array} \right.$$

avec $r, t \in \,]-2, 3[$. Représenter ensuite ces courbes sur un même graphique afin de vérifier vos solutions.

Exercice 5. Implémenter une fonction qui prend en argument une liste l de matrices et qui rend la liste des déterminants des matrices carrées de l.

Exercice 6. Considérons la fonction définie par $f(x) = x^2 \ln(x) \exp(-x-2)$.

(a) Déterminer la concavité de la fonction f au point $x = 1,2$.

Pour rappel, la concavité au point $x = x_0$ dépend du signe de $D^2 f(x_0)$.

(b) Donner une approximation à 3 décimales du point d'inflexion x_0 de f appartenant à l'intervalle $]1, 2[$.

Suggestion : vous aurez éventuellement besoin de la fonction `FindRoot` (resp. `findroot`) si vous utilisez Mathematica (resp. Python). Si vous utilisez Python, il faudra faire l'import suivant : `from sympy.mpmath import findroot`.

Exercice 7. Le fichier "calc1.ods" reprend la liste des commandes effectuées dans un entrepôt. La première colonne représente le numéro de la commande, les deux suivantes donnent l'heure de début et de fin de préparation de la commande, la troisième donne le numéro du camion qui effectuera la livraison et les deux dernières colonnes donnent le nombre de cartons et de palettes présents dans la commande. Répondre aux questions suivantes :

(a) Déterminer le nombre de camions utilisés.

(b) Déterminer le temps moyen de préparation par commande.

(c) Créer une nouvelle feuille de calcul et mettre dans celle-ci uniquement les lignes concernant le camion 107.

(d) Sans utiliser de filtre, déterminer le nombre de commandes n'ayant aucune palette présentes dans les camions 105 et 109.

GROUPE 2

EXAMEN ÉCRIT : JUIN 2018

Consignes : Cette partie dure 3 heures. À la fin de l'examen, envoyer au moyen de votre adresse ULiège vos différents fichiers aux trois adresses suivantes : echarlier@uliege.be, beatrice.lahaye@uliege.be et tkleyntssens@uliege.be. L'accès à internet et à vos notes de cours est autorisé mais aucun moyen de communication (messagerie, téléphone, e-mail, ...) ne sera toléré durant l'examen. Toute transgression de cette dernière règle sera sanctionnée par une cote de 0/20.

Le choix du logiciel avec lequel vous répondez à chaque question est libre, néanmoins chacun des logiciels vus en cours (Mathematica, Python, Geogebra et Calc) doit au minimum être utilisé pour répondre à une question dans son intégralité.

Exercice 1. Dans un espace affine euclidien de dimension 2, on considère un cercle $\mathcal{C}$, un point O extérieur à $\mathcal{C}$ et un point $A \in \mathcal{C}$. On nomme respectivement $\mathcal{T}$ et $\mathcal{N}$ les droites tangente et normale au cercle en A. Soit M l'intersection de $\mathcal{T}$ avec la parallèle à $\mathcal{N}$ passant par O. Représenter la courbe engendrée par le point M lorsque A décrit $\mathcal{C}$.

Exercice 2. Une matrice est dite échelonnée en lignes si chacune de ses lignes non nulle commence avec strictement plus de 0 que la ligne précédente. On notera que cela implique que les lignes nulles d'une telle matrice sont obligatoirement ses dernières lignes.

Les matrices A et B ci-dessous sont des exemples de matrices échelonnées.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 8 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Implémenter une fonction qui détermine si, oui ou non, une matrice est échelonnée.

Exercice 3. Étant donné un chiffre n (entre 0 et 9) et une liste de naturels l. Rédiger un algorithme qui rend le nombre d'éléments de l dont exactement un des chiffres est n. Implémenter ensuite cet algorithme et le tester lorsque $n = 8$ en générant une liste aléatoire de 200 nombres compris entre 0 et 10000.

Exercice 4. Déterminer les coordonnées des points d'intersections des courbes d'équations paramétriques

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 4t^2 - 3t + 2 \\ y & = & \pi t \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2r + 3 \\ y & = & 1 - 2r \end{array} \right.$$

avec $r, t \in \,]-1, 2[$. Représenter ensuite ces courbes sur un même graphique afin de vérifier vos solutions.

Exercice 5. Implémenter une fonction qui prend en argument une liste l de matrices carrées et qui rend la liste des matrices inverses des matrices inversibles de l.

Exercice 6. Considérons la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}\sin(x)$. Déterminer le maximum et le minimum de la fonction f dans l'intervalle $]0,6[$.

Suggestion : vous aurez éventuellement besoin de la fonction `FindRoot` (resp. `findroot`) si vous utilisez Mathematica (resp. Python). Si vous utilisez Python, il faudra faire l'import suivant : `from mpmath import findroot`.

Exercice 7. Le fichier "calc2.ods" reprend la liste des buteurs lors de l'Euro 2016. La première colonne donne le nom du joueur, la deuxième son pays, la troisième le nombre de goals qu'il a marqué et la dernière donne son temps de jeu total lors du tournoi. Répondre aux questions suivantes :

(a) On définit le ratio d'un joueur comme le nombre de goals qu'il a marqué divisé par son temps de jeu. Ajouter une colonne calculant le ratio de chaque joueur et déterminer celui qui a le ratio le plus élevé.

(b) Déterminer le temps de jeu total moyen de l'ensemble de ces joueurs.

(c) Créer une nouvelle feuille de calcul et mettre dans celle-ci uniquement les lignes concernant les joueurs belges.

(d) Sans utiliser de filtre, déterminer le nombre de joueurs ayant remporté l'Euro 2016 ayant un ratio plus grand que 0,004. Pour rappel, le vainqueur de l'Euro 2016 est le Portugal.

GROUPE 1

EXAMEN ÉCRIT : AOÛT 2018

Consignes : Cette partie dure 3 heures. À la fin de l'examen, envoyer au moyen de votre adresse ULiège vos différents fichiers aux trois adresses suivantes : echarlier@uliege.be, beatrice.lahaye@uliege.be et tkleyntssens@uliege.be. L'accès à internet et à vos notes de cours est autorisé mais aucun moyen de communication (messagerie, téléphone, e-mail, ...) ne sera toléré durant l'examen. Toute transgression de cette dernière règle sera sanctionnée par une cote de 0/20.

Le choix du logiciel avec lequel vous répondez à chaque question est libre, néanmoins chacun des logiciels vus en cours (Mathematica, Python, Geogebra et Calc) doit au minimum être utilisé pour répondre à une question dans son intégralité.

Exercice 1. Dans un espace affine euclidien de dimension 2, on considère un cercle $\mathcal{C}$ et un point $A \in \mathcal{C}$. Soient B le point diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ en B. Finalement, soient M un point de $\mathcal{T}$, P le point d'intersection (distinct de A) de la droite AM avec $\mathcal{C}$ et Q le point vérifiant l'égalité $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{PM}$. Représenter la courbe engendrée par le point Q lorsque M décrit $\mathcal{T}$.

Exercice 2. On dit d'une matrice M qu'elle est " absolument supérieure " à une matrice N de mêmes dimensions si, pour tout indice i, la somme des éléments de la i^{e} ligne de M est supérieure à la somme des valeurs absolues des éléments de la i^{e} ligne de N. Implémenter une fonction qui, étant donné deux matrices M et N de mêmes dimensions, détermine si, oui ou non, M est " absolument supérieure " à N.

Exercice 3. Vérifier que la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x &= \cos(t) \\ y &= \sin(t) \\ z &= t \end{cases}$$

est inscrite dans un cylindre de rayon 1. Pour ce faire, représenter cette courbe et le cylindre correspondant sur un même graphique.

Exercice 4. Étant donné deux naturels n et p, rédiger un algorithme qui rend le nombre de naturels inférieurs ou égaux à n dont la somme somme des chiffres qui le composent est un multiple de p. Implémenter ensuite cet algorithme.

Exercice 5. L'interpolation est une opération permettant de construire une fonction à partir de la donnée d'un nombre fini de ses valeurs. Cette fonction doit donc passer par un ensemble de points donnés et on peut lui imposer diverses propriétés. L'interpolation la plus classique est l'*interpolation polynomiale* : étant donnés $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ des points de $\mathbb{R}^2$ tels que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$; on peut montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré n tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Dans Mathematica, ce polynôme est calculé grâce à la fonction

`InterpolatingPolynomial`

et dans Python, il est calculé avec la fonction

`interpolate`

(utiliser la commande `from sympy.polys.polyfuncs import interpolate` pour l'importer).

Créer une fonction prenant en argument une liste de couples de réels ainsi qu'un nombre réel x, et renvoyant l'interpolation polynomiale de ces couples évalué en x. Tester ensuite cette fonction sur les couples $(1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4)$ et le réel $x = 10$. La réponse doit être 22/7.

Exercice 6. Le fichier " calc3.ods " reprend la liste de clients qui ont passé une commande aujourd'hui dans un entrepôt. La première représente le numéro du client, la deuxième le nombre de commandes effectuées et la troisième donne le prix (TVA compris) par commande. Répondre aux questions suivantes :

(a) En sachant que la TVA s'élève à 21%, ajouter une colonne affichant le prix hors TVA par commande pour chaque client.

(b) Déterminer la médiane du nombre de commandes effectuées.

(c) Créer une nouvelle feuille et mettre dans celle-ci uniquement les lignes concernant les client ayant effectué plus de 3 commandes.

(d) Sans utiliser de filtre, déterminer le prix moyen par commande des clients ayant effectué 1 ou 2 commandes.

Logiciels mathématiques
2018–2019 – Bachelier en sciences mathématiques

GROUPE 1

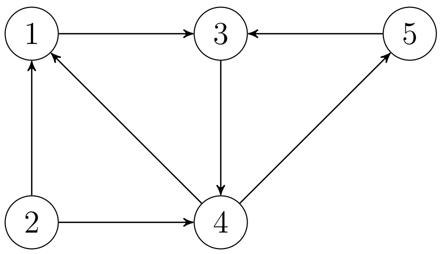
EXAMEN ÉCRIT : JUIN 2019

Consignes : Cette partie dure 3 heures. À la fin de l'examen, envoyer au moyen de votre adresse ULiège vos différents fichiers aux deux adresses suivantes : echarlier@uliege.be et beatrice.lahaye@uliege.be. L'accès à internet et à vos notes de cours est autorisé mais aucun moyen de communication (messagerie, téléphone, e-mail, ...) ne sera toléré durant l'examen. Toute transgression de cette règle sera sanctionnée par une cote de 0/20.

Le choix du logiciel avec lequel vous répondez à chaque question est libre, néanmoins chacun des logiciels vus en cours (Mathematica, Python, Geogebra et Calc) doit au minimum être utilisé pour répondre à une question dans son intégralité.

Exercice 1. Réaliser un des deux exercices ci-dessous à l'aide de la documentation.

1. *Mathematica* : Représenter le graphe ci-dessous à l'aide de la commande `Graph`. L'esthétique ne sera pas prise en compte, néanmoins l'ensemble des éléments (sommets, labels des sommets et arcs) doivent apparaître.

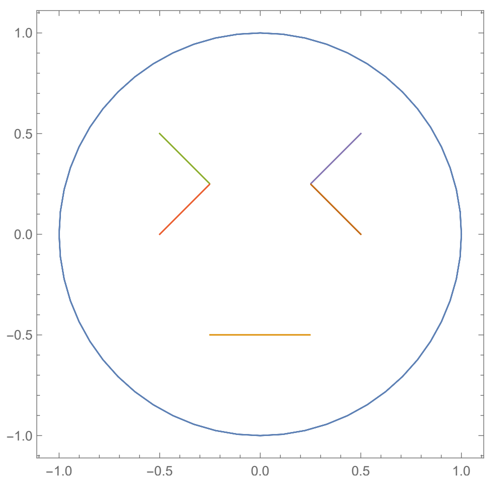


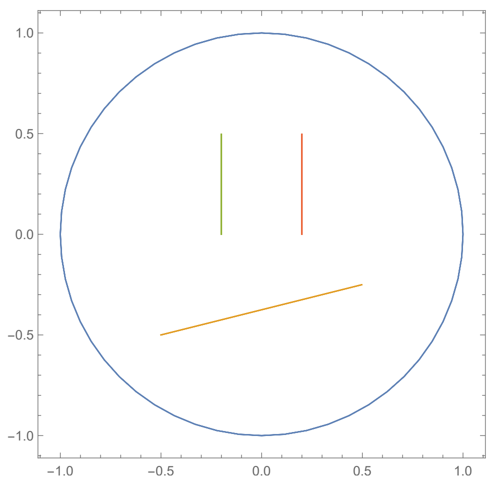
2. *Python :* Décoder le message

FBKIGKUIYNGKUIJYEDI

à l'aide de la commande `decipher_shift` accessible via l'import suivant : `from sympy.crypto.crypto import decipher_shift`.

Exercice 2. Représenter un des deux symboles ci-dessous.





Exercice 3. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & b \\ bx+by+az & = & a^2 \\ dx+cy+az & = & ab \end{array}\right.$$

en fonction des paramètres réels a, b, c et d.

Exercice 4. Une matrice harmonieuse est une matrice carrée dont chaque élément est un réel compris entre -1 et 1 et dont la somme des éléments de chaque ligne vaut 0. Implémenter une fonction qui détermine si, oui ou non, une matrice carrée est harmonieuse.

Exercice 5. On considère un naturel, par exemple 723, et on effectue le produit des chiffres qui le composent, dans ce cas on obtient $7 \times 2 \times 3 = 42$. On réitère ensuite l'opération avec le naturel obtenu jusqu'à stabilisation. Ici, on obtient $4 \times 2 = 8$ puis, si l'on voulait continuer à opérer, on obtiendrait ensuite 8 à chaque étape. On dira que le produit stabilisé de 723 est 8. De la même façon, il est possible de définir le produit stabilisé de tout naturel n. Rédiger un algorithme qui, étant donné un naturel n, rend son produit stabilisé.

Exercice 6. On considère un cercle $\mathcal{C}$ et $[AB]$ un de ses diamètres. Soient C et D deux points situés sur la droite AB tels que C est extérieur et D est intérieur au cercle $\mathcal{C}$. On nomme C' un point de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ la perpendiculaire à AB passant par C'. On construit le point D' sur $\mathcal{D}$ tel que les droites CC' et DD' sont parallèles entre elles. Représenter le lieu des points D' obtenus en faisant varier C' sur le cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 7. Le fichier "données_climatiques_1.ods" contient les relevés des températures moyennes (en degrés Celsius) et des précipitations (en mm) effectués sur les douze mois d'une année dans 175 stations météorologiques.

(a) Dans la *Feuille 1*, compléter la colonne correspondant à la température moyenne observée sur l'année ;

(b) A partir des données de la *Feuille 1*, déterminer la température maximale observée en avril sous climat aride et le nombre de stations météorologiques situées en Océanie.

(c) Dans la *Feuille 2*, compléter la colonne correspondant au total des précipitations observées sur l'année ;

(d) Un institut souhaite comparer les données observées aux données qu'il a récoltées les années précédentes. Pour ce faire, il a décidé de se restreindre à un échantillon de 15 stations météorologiques pour lequel un tirage systématique a été réalisé. Les codes d'identification de ces 15 stations sont indiqués dans la *Feuille 3*. En utilisant la fonction `RechercheV`, compléter cette feuille avec les données demandées ;

(e) Utiliser un filtre pour n'afficher que les lignes de la *Feuille 4* relatives au stations météorologiques qui
   - soit sont situées en Afrique et pour lesquelles les températures moyennes en janvier sont strictement inférieures à 20 degrés Celsius ;
   - soit étudient un climat tropical humide.

GROUPE 2

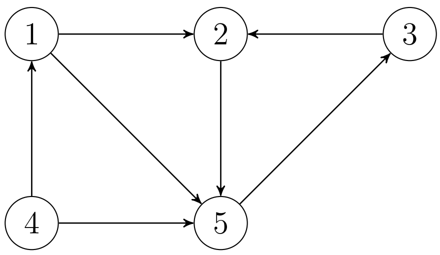
EXAMEN ÉCRIT : JUIN 2019

Consignes : Cette partie dure 3 heures. À la fin de l'examen, envoyer au moyen de votre adresse ULiège vos différents fichiers aux deux adresses suivantes : echarlier@uliege.be et beatrice.lahaye@uliege.be. L'accès à internet et à vos notes de cours est autorisé mais aucun moyen de communication (messagerie, téléphone, e-mail, ...) ne sera toléré durant l'examen. Toute transgression de cette règle sera sanctionnée par une cote de $0/20$.

Le choix du logiciel avec lequel vous répondez à chaque question est libre, néanmoins chacun des logiciels vus en cours (Mathematica, Python, Geogebra et Calc) doit au minimum être utilisé pour répondre à une question dans son intégralité.

Exercice 1. Réaliser un des deux exercices ci-dessous à l'aide de la documentation.

1. *Mathematica* : Représenter le graphe ci-dessous à l'aide de la commande `Graph`. L'esthétique ne sera pas prise en compte, néanmoins l'ensemble des éléments (sommets, labels des sommets et arcs) doivent apparaître.

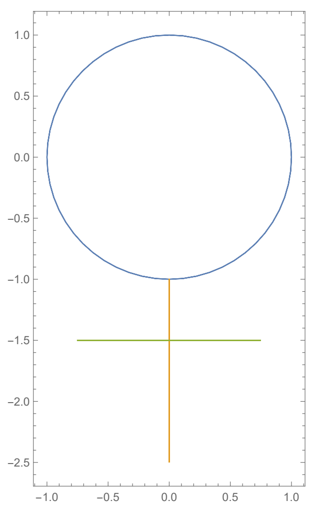


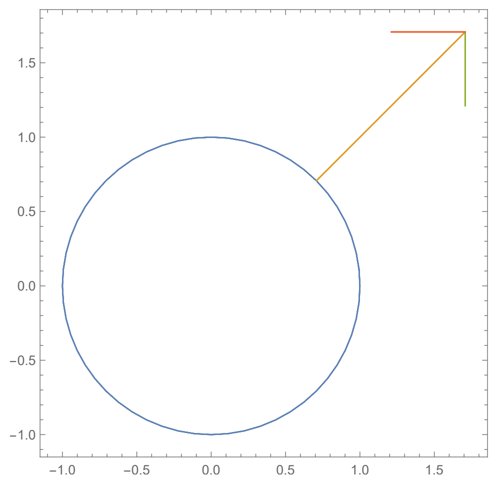
2. *Python :* Décoder le message

NANWDWKLGMJKVWXDMGK

à l'aide de la commande `decipher_shift` accessible via l'import suivant : `from sympy.crypto.crypto import decipher_shift`.

Exercice 2. Représenter un des deux symboles ci-dessous.





Exercice 3. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & b \\ ax+by+bz & = & a^2 \\ ax+cy+dz & = & ab \end{array}\right.$$

en fonction des paramètres réels a, b, c et d.

Exercice 4. Une matrice stochastique est une matrice carrée dont chaque élément est un réel positif et dont la somme des éléments de chaque ligne vaut 1. Implémenter une fonction qui détermine si, oui ou non, une matrice carrée est stochastique.

Exercice 5. On considère un naturel, par exemple 14628, et on effectue la somme des chiffres qui le composent, dans ce cas on obtient $1+4+6+2+8=21$. On réitère ensuite l'opération avec le naturel obtenu jusqu'à stabilisation. Ici, on obtient $2+1=3$ puis, si l'on voulait continuer à opérer, on obtiendrait ensuite 3 à chaque étape. On dira que la somme stabilisée de 14628 est 3. De la même façon, il est possible de définir la somme stabilisée de tout naturel n. Rédiger un algorithme qui, étant donné un naturel n, rend sa somme stabilisée.

Exercice 6. On considère un cercle $\mathcal{C}$ et $[AB]$ un de ses diamètres. Soient C et D deux points extérieurs au cercle $\mathcal{C}$ situés sur la droite AB, et C' un point de $\mathcal{C}$. On nomme $\mathcal{D}$ la perpendiculaire à AB passant par C'. On construit le point D' sur $\mathcal{D}$ tel que les droites CC' et DD' sont parallèles entre elles. Représenter le lieu des points D' obtenus en faisant varier C' sur le cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 7. Le fichier "données_climatiques_2.ods" contient les relevés des températures moyennes (en degrés Celsius) et des précipitations (en mm) effectués sur les douze mois d'une année dans 175 stations météorologiques.

(a) Dans la *Feuille 1*, compléter la colonne correspondant à la température moyenne observée sur l'année ;

(b) A partir des données de la *Feuille 2*, déterminer la moyenne des précipitations observées en février sous climat méditerranéen et la température minimale observée en novembre aux USA ;

(c) Dans la *Feuille 2*, compléter la colonne correspondant au total des précipitations observées sur l'année ;

(d) Un institut souhaite comparer les données observées aux données qu'il a récoltées les années précédentes. Pour ce faire, il a décidé de se restreindre à un échantillon de 15 stations météorologiques pour lequel un tirage systématique a été réalisé. Les codes d'identification de ces 15 stations sont indiqués dans la *Feuille 3*. En utilisant la fonction `RechercheV`, compléter cette feuille avec les données demandées ;

(e) Utiliser un filtre pour n'afficher que les lignes de la *Feuille 4* relatives au stations météorologiques qui
   — soit sont situées en Europe et pour lesquelles les précipitations en mars sont strictement supérieures à 50mm ;
   — soit étudient un climat de montagne.

GROUPE 1

EXAMEN ÉCRIT : AOÛT 2019

Consignes : Cette partie dure 3 heures. À la fin de l'examen, envoyez au moyen de votre adresse ULiège vos différents fichiers aux deux adresses suivantes : echarlier@uliege.be et beatrice.lahaye@uliege.be. Veillez à envoyer vos fichiers sous un format adéquat, tout fichier rendu dans un format illisible sera ignoré lors de la correction. L'accès à internet et à vos notes de cours est autorisé mais aucun moyen de communication (messagerie, téléphone, e-mail, ...) ne sera toléré durant l'examen. Toute transgression de cette dernière règle sera sanctionnée par une cote de 0/20.

Le choix du logiciel avec lequel vous répondez à chaque question est libre, néanmoins chacun des logiciels vus en cours (Mathematica, Python, Geogebra et Calc) doit au minimum être utilisé pour répondre à une question dans son intégralité.

Exercice 1. Dans un espace affine euclidien de dimension 2, on considère deux points A et B situés à une distance d l'un de l'autre avec $0 \leq d \leq 10$. On nomme M un point mobile sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon r avec $0 \leq r \leq d$. Soit I l'intersection de la droite AM et de la médiatrice du segment $[BM]$. Représenter la courbe décrite par le point I lorsque M varie sur le cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 2. Le quotient de la division euclidienne du polynôme $3x^2 + 2x - 1$ par le polynôme $x - 3$ est le polynôme $3x + 11$ tandis que le reste de cette division est 32. Ainsi, on peut écrire l'égalité

$$3x^2 + 2x - 1 = (x - 3)(3x + 11) + 32.$$

Implémenter une fonction qui prend comme argument deux polynômes et rend le quotient et le reste de la division du premier polynôme par le second. Les conventions suivantes devront être respectées :

- Les polynômes seront encodés par la liste de leurs coefficients en commençant par le coefficient associé au terme dominant. Par exemple, le polynôme $3x^2 + 2x - 1$ sera représenté par la liste $\{3, 2, -1\}$.
- Tous les zéros inutiles seront supprimés. Pour l'exemple précédent, la liste $\{0, 3, 2, -1\}$ aurait donc été invalide.
- La fonction renverra une liste contenant le quotient et le reste. Dans le cas de l'exemple considéré, la fonction renverrait $\{\{3, 11\}, 32\}$.

Dans un souci de facilité, on considèrera que les polynômes passés en argument sont à coefficients entiers et que le coefficient du terme dominant du diviseur (second polynôme passé en argument) est 1.

Exercice 3. Si la fonction $f : x \to \sqrt{2x^2 + 1}$ vérifie l'équation différentielle

$$f(x)D^2f(x) + (Df(x))^2 = g(x), \; x \in \mathbb{R},$$

que vaut $g(x)$?

Exercice 4. Étant donné une liste d'entiers l et un chiffre $n \in \{0, \ldots, 9\}$, rédiger un algorithme qui rend la liste du nombre d'apparitions du chiffre n dans chacun des éléments de la liste l. Par exemple, pour la liste $\{1254, 3161, 118, 48, 5127\}$ et le chiffre 1, le résultat rendu par l'algorithme devrait être la liste $\{1, 2, 2, 0, 1\}$. Implémenter ensuite cet algorithme et le tester pour le chiffre 8 en générant une liste aléatoire de 100 entiers inférieurs à 1000.

Exercice 5. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x + y + z & = & b \\ bx + by + az & = & a^2 \\ dx + cy + az & = & ab \end{array}\right.$$

en fonction des paramètres réels a, b, c et d.

Exercice 6. Le fichier "calc.ods" reprend une liste de résultats pour 4 parcours d'une randonnée se déroulant sur plusieurs jours.

(a) Sur la Feuille 1, calculer le temps moyen pour achever un parcours de randonnée.
(b) Sur la Feuille 1, déterminer le meilleur temps de parcours pour le parcours bleu.
(c) Sur la Feuille 2, afficher uniquement les lignes relatives au résultats ayant eu lieu avant le 18/12/2004 sur le parcours blanc.