Mathématiques pour l'informatique 1
Année académique 2021–2022

C.Do Zot@uliege.be - ccisternino@uliege.be

1)

Propositions logiques et tables de vérité

Exercices à résoudre à domicile, correction

Exercice 14. Démontrer que les assertions suivantes sont logiquement équivalentes.

1. $\neg(P \wedge Q)$

2. $(\neg P) \vee (\neg Q)$

3. $P \Rightarrow \neg Q$

Exercice 15. Évaluer les assertions suivantes en utilisant les tables de vérités. Indiquer alors lesquelles parmi ces assertions sont des tautologies et lesquelles sont des contradictions.

1. $(P \Leftrightarrow Q) \wedge (P \Leftrightarrow \neg Q)$

2. $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Solution :

1. Contradiction

2. Tautologie

Exercice 16. Démontrer que si P, Q, R et S sont des assertions, alors on a

$$((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \Rightarrow S \equiv (\neg R \wedge \neg S) \Rightarrow (P \wedge \neg Q).$$

Peut-on échanger les rôles de R et S ? Justifier.

Solution : On peut échanger les rôles de R et S au vu de la symétrie de leurs rôles dans l'assertion de droite.

Exercice 17. Ecrire la table de vérité des assertions suivantes en considérant uniquement les valeurs des variables données.

1. $P \wedge (P \vee Q)$ si Q est vrai

2. $P \vee (Q \Rightarrow R)$ si Q est faux

Solution :

P	Q	$P \wedge (P \vee Q)$
0	1	0
1	1	1

P	Q	R	$P \vee (Q \Rightarrow R)$
0	0	0	1
0	0	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1

Exercice 18. Soient P, Q, R des propositions logiques. Dans chacun des cas suivants, les assertions citées sont-elles la négation l'une de l'autre ? Si non, donner la négation de chacune.

1. $(P \wedge Q)$ et $(\neg P \wedge \neg Q)$
2. $(P \Rightarrow Q)$ et $(\neg P \Rightarrow \neg Q)$
3. $(P \Rightarrow (R \wedge \neg Q))$ et $((\neg R \vee Q) \wedge P)$

Solution :

1. Non.
 $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$
 $\neg(\neg P \wedge \neg Q) \equiv (P \vee Q)$
2. Non.
 $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q)$
 $\neg(\neg P \Rightarrow \neg Q) \equiv (\neg P \wedge Q)$
3. Oui.

Exercice 19. En interprétant P par “je parle”, Q par “tu ne chantes pas” et R par “il n’y a pas de bruit”, traduisez les assertions suivantes en phrases du langage naturel.

1. $(\neg P \wedge R) \Rightarrow Q$
2. $\neg R \Rightarrow (P \vee \neg Q)$

Solution :

1. si je ne parle pas et qu’il n’y a pas de bruit, alors tu ne chantes pas.
2. Si il y a du bruit, alors soit je parle, soit tu chantes.

Exercice 20. Soient P la proposition “les chiens aboient” et Q la proposition “la caravane passe”. Traduisez les phrases suivantes en langage propositionnel.

1. Les chiens n’aboient pas.
2. La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.
3. Si la caravane ne passe pas, alors les chiens n’aboient pas.

Solution :

1. $\neg P$
2. $\neg Q \vee P$
3. $\neg Q \Rightarrow \neg P$

Exercice 21. Sachant que s’il a plu hier ou si les muguetts sont en fleurs, alors le jardinier de mon voisin est content, que peut-on déduire du fait que le jardinier est content ?

1. Il n’a pas plu et les muguetts sont en fleurs.
2. Il n’a pas plu ou les muguetts ne sont pas en fleurs.
3. Il n’a pas plu et les muguetts ne sont pas en fleurs.
4. Il a plu et les muguetts ne sont pas en fleurs.
5. On ne peut rien déduire.

Solution : On ne peut rien déduire.

Exercice 22. S’il a plu hier ou si les muguetts sont en fleurs, alors le jardinier de mon voisin est content. Déterminer, parmi les suivantes, l’assertion qui forme une phrase logiquement équivalente : si le jardinier n’est pas content,...

1. Il n’a pas plu et les muguetts sont en fleurs.

2. Il n'a pas plu ou les muguets ne sont pas en fleurs.
3. Il n'a pas plu et les muguets ne sont pas en fleurs.
4. Il a plu et les muguets ne sont pas en fleurs.
5. Aucune ne donne une phrase équivalente.

Solution : Il n'a pas plu et les muguets ne sont pas en fleurs.

Exercice 23. Parmi les affirmations suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. Justifier.

1. Une condition nécessaire pour qu'un quadrilatère soit un carré est que tous ses angles soient des angles droits.
2. Une condition suffisante pour que le carré d'un réel soit plus grand ou égal à celui-ci est que ce réel soit négatif.
3. Une condition nécessaire pour que le carré d'un réel soit plus grand ou égal à celui-ci est que ce réel soit positif.

Solution :

1. V
2. V
3. F

Exercice 24. Considérons l'équivalence logique " $x^2 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2$ " (où $x \in \mathbb{R}$).

Donner un ensemble de valeur(s) de x pour lequel cette proposition est

1. une tautologie ?
2. une contradiction ?
3. satisfaisable ?

Solution :

1. Cette proposition est une tautologie dès que $x \in [-2, 2]$ (donc, toute partie de cette intervalle convient).
2. Cette proposition est une contradiction dès que $x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ (donc, toute partie de ces deux intervalles convient).
3. Cette proposition est satisfaisable dès que l'on considère un ensemble de valeurs de x telles qu'au moins l'une d'elles appartient à $[-2, 2]$ et une autre à $] -\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

Exercice 25. On travaille avec $x \in]-\infty, 0[$. L'assertion " $|x| \geq 3 \Leftrightarrow x \geq -3$ " est-elle une tautologie, une contradiction, satisfaisable ? Justifier.

Solution : L'assertion considérée est alors satisfaisable : en effet, pour $x = -3$, elle est vraie, alors que pour toutes les autres valeurs de x dans $] -\infty, 0[$, elle est fausse !

2)

Techniques de démonstration et tables de Karnaugh

Exercices à résoudre à domicile, correction

Tables de Karnaugh

Exercice 10. Donner des formules aussi condensées que possible pour les expressions f , g et h dont les tables de vérité sont données ci-dessous.

x	y	z	t	f	g	h
0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Solution :

$$f \equiv (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge \neg z \wedge \neg t) \vee (\neg y \wedge \neg z \wedge \neg t)$$

$$g \equiv (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge z \wedge t) \vee (\neg y \wedge z \wedge t) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge \neg t)$$

$$h \equiv \neg y \vee (\neg x \wedge \neg z) \vee (x \wedge z \wedge t)$$

Exercice 11. Exprimer la formule suivante sous FND et FNC :

$$\varphi \equiv p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge \neg(\neg q \vee \neg p))$$

Solution : $\varphi \equiv \neg p \vee q$.

Exercice 12. Donner une FND et une FNC de longueur minimale pour les formules dont les tables de Karnaugh sont les suivantes :

φ_3		(x, y)			
		(1,1)	(0,1)	(0,0)	(1,0)
(z, t)	(1,1)	1	0	0	1
	(0,1)	0	1	1	0
	(0,0)	0	1	1	0
	(1,0)	1	0	0	1

φ_4		(x, y)			
		(1,1)	(0,1)	(0,0)	(1,0)
(z, t)	(1,1)	1	0	0	0
	(0,1)	1	0	0	1
	(0,0)	1	1	1	1
	(1,0)	0	0	0	0

Solution :

$$\varphi_3 \equiv (x \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg z) \equiv (x \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee z)$$

$$\varphi_4 \equiv (x \wedge \neg z) \vee (\neg z \wedge \neg t) \vee (x \wedge y \wedge t) \equiv (x \vee \neg t) \wedge (y \vee \neg z) \wedge (\neg z \vee t)$$

Exercice 13. Simplifier les expressions suivantes en utilisant les tables de Karnaugh :

$$\varphi_2 \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s)$$

$$\varphi_3 \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s)$$

$$\varphi_4 \equiv (q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

$$\varphi_5 \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$\varphi_6 \equiv (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge \neg r)$$

Solution :

$$\varphi_2 \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg q \wedge \neg r)$$

$$\varphi_3 \equiv (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge r \wedge s) \vee (\neg q \wedge r \wedge s)$$

$$\varphi_4 \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (q \wedge r \wedge s)$$

$$\varphi_5 \equiv (p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$$

$$\varphi_6 \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$$

Techniques de démonstration

Exercice 14. On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$$

avec $a \neq 0$ et b des paramètres réels. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$.

Indice : Par contraposée

Exercice 15. Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a + b$ est irrationnel, alors a ou b est irrationnel.

Indice : Par contraposée

Exercice 16. Montrer que la racine carrée d'un nombre premier est un nombre irrationnel.

Indice : Par l'absurde

Exercice 17. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

Indice : Par disjonction de cas

Exercice 18. Soit n un naturel. Montrer que le reste de la division de n^2 par 4 est soit 0, soit 1.

Indice : Par disjonction de cas

3)

Ensembles, relations et quantificateurs

Exercices à résoudre à domicile, correction

Ensembles

Exercice 13. Combien d'éléments contient l'ensemble $\{\emptyset\}$?

Solution : L'ensemble contient 1 élément, à savoir $\emptyset$.

Exercice 14. Les expressions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\emptyset \in \{\emptyset\}$

2. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

3. $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$

4. $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

Solution :

1. V

2. V

3. F

4. F

Exercice 15. Donner l'ensemble des parties des ensembles suivants :

$$B = \{1, \{2, 3\}, 4\}$$

$$C = \{(0, 1), (0, 4), (2, 6)\}.$$

Solution :

$$\mathcal{P}(B) = \left\{ \emptyset, \{1\}, \{4\}, \{\{2, 3\}\}, \{1, 4\}, \{1, \{2, 3\}\}, \{\{2, 3\}, 4\}, \{1, \{2, 3\}, 4\} \right\}$$

$$\mathcal{P}(C) = \left\{ \emptyset, \{(0, 1)\}, \{(0, 4)\}, \{(2, 6)\}, \{(0, 1), (0, 4)\}, \{(0, 1), (2, 6)\}, \{(0, 4), (2, 6)\}, \{(0, 1), (0, 4), (2, 6)\} \right\}.$$

Exercice 16. Donner le produit cartésien des ensembles suivants :

$$A = \{a, b, c, d\} \text{ et } B = \{e, f, g\}$$

$$C = \{1, 3, 5\} \text{ et } D = \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

Solution :

$$A \times B = \left\{ (a, e), (a, f), (a, g), (b, e), (b, f), (b, g), (c, e), (c, f), (c, g), (d, e), (d, f), (d, g) \right\}$$

$$C \times D = \left\{ (1, 0), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (3, 0), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (3, 8), (5, 0), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (5, 8) \right\}$$

Exercice 17. Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Utiliser les diagrammes de Venn pour se convaincre des égalités suivantes :

1. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Exercice 18. Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Démontrer l'assertion suivante :

1. $(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow (A = B)$.

Exercice 19. Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Sachant que $(A \cap B) \subseteq C$, quelle propriété peut-on déduire parmi celles qui suivent ?

1. $(A \setminus B) \cap C = \emptyset$
2. $(A \setminus C) \cap B = \emptyset$
3. $(C \setminus A) \cap B = \emptyset$
4. $(C \setminus B) \cap A = \emptyset$

Solution : La propriété 2.

Relations

Exercice 20. On considère les ensembles $A = \{0, 1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2\}$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont une relation de A dans B ? Parmi ces relations, lesquelles sont des fonctions ?

1. $\{0, 2\}$
2. $\{(0, 0), (0, 2)\}$
3. $\{(0, 1), (2, 2), (3, 1), (1, 0)\}$
4. $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}$
5. $\{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$

Solution :

1. Pas une relation de A dans B .
2. Relation de A dans B .
3. Fonction de A dans B .
4. Relation de A dans B .
5. Fonction de A dans B .

Exercice 21. On considère l'ensemble $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire en extension la relation $\leq$ de A dans A . S'agit-il d'une fonction ?

Solution : La relation demandée est

$$\mathcal{R} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}.$$

Cette relation n'est pas une fonction.

Exercice 22. Parmi les relations suivantes, lesquelles sont des fonctions ?

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = |y|\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 7\}$

Solution : Les relations 2 et 3 sont des fonctions.

Exercice 23. Soient E et F deux ensembles et f une fonction de E dans F . Démontrer les assertions suivantes :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

Quantificateurs

Exercice 24. Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$. Écrire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs.

1. $A \cap B = \emptyset$.
2. $A \subsetneq B$.

Solution :

1. $\forall x \in \mathbb{N}, (x \in B) \Rightarrow (x \notin A)$
2. $(\forall x \in \mathbb{N}, (x \in A) \Rightarrow (x \in B)) \wedge (\exists x \in \mathbb{N} : (x \in B) \wedge (x \notin A))$

Exercice 25. Nier les propositions suivantes :

1. Toutes les voitures rouges sont rapides.
2. Il existe un mouton écossais dont au moins un côté est noir.
3. Tout triangle rectangle possède un angle droit.

Solution :

1. Il existe une voiture rouge qui n'est pas rapide.
2. Tous les moutons écossais ne possèdent pas de côté noir.
3. Il existe un triangle rectangle qui ne possède pas d'angle droit.

Exercice 26. Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes.

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Il existe un entier multiple de tous les autres.
3. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Solution :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
2. $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = ky$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \neq y) \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q} : (x < q < y) \vee (y < q < x))$

Exercice 27. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier les énoncés suivants.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1$.
2. Il existe $x \in [0, +\infty[$ tel que $f(x) \geq 0$.

Solution :

1. Il existe $x \in \mathbb{R} : f(x) < 1$.
2. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) < 0$.

Exercice 28. Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels. Traduire les assertions suivantes par une phrase simple et compréhensible immédiatement.

1. $\forall l \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : q_n = l$.
2. $\forall q \in \mathbb{Q} \cap]0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N} : |q_n| < q$.

Solution :

1. La suite parcourt tous les naturels.
2. Tous les éléments de la suite sont nuls.

4)

Démonstration par récurrence, signe sommatoire

Exercices à résoudre à domicile, correction

Démonstration par récurrence

Exercice 10. Démontrer par récurrence la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 11. Démontrer par récurrence la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 12. Démontrer que $3^{2n} - 1$ est divisible par 8 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13. Soit E un ensemble. Démontrer par récurrence que l'égalité suivante est satisfaite quel que soit $n \geq 2$:

$$E \setminus \left(\bigcap_{k=1}^n A_k \right) = \bigcup_{k=1}^n (E \setminus A_k)$$

où $A_k \in \mathcal{P}(E) \forall k \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 14. Soient $u_0 = 2$ et $u_n = \frac{u_{n-1}}{1 + u_{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

Exercice 15. Soient $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}_0$, on a $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 16. Soient $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}_0$, on a $1 \leq u_n \leq n^2$.

Signe sommatoire

Exercice 17. On considère une fonction f définie sur les entiers et on pose $S = \sum_{j=-4}^{n+5} f(j)$.

Transformer l'expression de S en effectuant le changement de variable $k = j + 4$:

$$S = \sum_{k=\dots}^{\dots} f(\dots)$$

Solution : $S = \sum_{k=0}^{n+9} f(k-4)$.

Exercice 18. Exprimer explicitement en fonction de n les sommes suivantes :

$$1. S_3 = \sum_{i=3}^{n+3} \ln(n) - \sum_{j=2}^{n+2} \ln\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$3. S_5 = \sum_{p=0}^{n+4} \frac{1}{p+4} - \sum_{i=3}^{n+5} \frac{1}{i+2}$$

$$2. S_4 = \sum_{j=-3}^{7n-1} 3j + \sum_{j=n-3}^{8n} (4n - 3j)$$

$$4. S_6 = \sum_{k=-n}^{-2} (k^4 + |k|) - \sum_{k=-1}^{n-3} ((k+3)^4 + k+3)$$

$$5. S_7 = \sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \sum_{k=3}^{n+3} \sin\left(\frac{k\pi - 3\pi}{2}\right) \text{ si } n \text{ est impair. Qu'en est-il si } n \text{ est pair?}$$

Solution :

$$1. S_3 = (n+1) \ln(2).$$

$$3. S_5 = \frac{1}{4} + \frac{1}{n+8}.$$

$$2. S_4 = n(-17 + 7n).$$

$$4. S_6 = 0.$$

$$5. S_7 = 1 - \sin\left(\frac{n}{2}\pi\right) \text{ si } n \text{ est impair ; } S_7 = 1 + \cos\left(\frac{n}{2}\pi\right) \text{ si } n \text{ est pair.}$$

Exercice 19.

1. Ecrire la somme S des n premiers naturels de deux façons différentes à l'aide d'un symbole sommatoire : en mettant les termes de cette somme dans l'ordre croissant puis décroissant.
2. En déduire que $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solution :

$$1. S = \sum_{k=1}^n k \text{ et } S = \sum_{k=1}^n (n - k + 1).$$

2. On constate que $2S = S + S = \sum_{k=1}^n n + 1 = n(n+1)$, ce qui permet de conclure.

Exercice 20. Afin de déterminer explicitement la valeur de $S_0 = \sum_{k=0}^n q^k$ ($n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$), on calcule $(1 - q)S_0$.

1. Que vaut S_0 ?

2. En déduire la valeur de $S_p = \sum_{k=p}^n q^k$ pour $p \in \{1, \dots, n\}$ quelconque.

Solution :

$$1. S_0 = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

$$2. S_p = q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Exercice 21. On considère l'ensemble $E = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i \leq n, 2 < j \leq 7\}$. Ecrire la somme des nombres p_{ij} pour $(i, j) \in E$ sous la forme d'une somme double :

$$\sum_{(i,j) \in E} p_{ij} = \sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} p_{ij} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \sum_{i=\dots}^{\dots} p_{ij}$$

Solution :

$$\sum_{(i,j) \in E} p_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=3}^7 p_{ij} = \sum_{j=3}^7 \sum_{i=1}^n p_{ij}$$

Exercice 22. On considère l'ensemble $E = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 2 \leq i \leq n+1, -1 < j \leq i\}$. Ecrire la somme des nombres p_{ij} pour $(i, j) \in E$ sous la forme d'une somme double :

$$\sum_{(i,j) \in E} p_{ij} = \sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} p_{ij} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \sum_{i=\dots}^{\dots} p_{ij}$$

Solution :

$$\sum_{(i,j) \in E} p_{ij} = \sum_{i=2}^{n+1} \sum_{j=0}^i p_{ij} = \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=\max(2,j)}^{n+1} p_{ij}$$

Exercice 23. On considère l'ensemble $E = \{(r, s) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq r + s \leq n + 3\}$. Ecrire la somme des nombres p_{rs} pour $(r, s) \in E$ sous la forme d'une somme double :

$$\sum_{(r,s) \in E} p_{rs} = \sum_{r=\dots}^{\dots} \sum_{s=\dots}^{\dots} p_{rs} = \sum_{s=\dots}^{\dots} \sum_{r=\dots}^{\dots} p_{rs}$$

Solution :

$$\sum_{(r,s) \in E} p_{rs} = \sum_{r=0}^{n+3} \sum_{s=0}^{n+3-r} p_{rs} = \sum_{s=0}^{n+3} \sum_{r=0}^{n+3-s} p_{rs}$$

Exercice 24.

1. Démontrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Démontrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$.

3. En déduire la valeur de $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |i - j|$.

Solution : Il suffit de noter que $|i - j| = \max(i, j) - \min(i, j)$: on conclut alors directement que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |i - j| = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

Exercice 25. Permuter les sommes suivantes :

1. $\sum_{i=1}^7 \sum_{j=i+1}^{10} (i - j)$

2. $\sum_{i=0}^5 \sum_{j=3}^7 \frac{i}{j}$

Solution :

1. $\sum_{j=2}^{10} \sum_{i=1}^{\min(7, j-1)} (i - j)$

2. $\sum_{j=3}^7 \sum_{i=0}^5 \frac{i}{j}$

Exercice 26. Exprimer explicitement en fonction de n les sommes suivantes :

1. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{i+j}$

2. $\sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n 1$

Solution :

1. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{i+j} = \frac{n^2}{2}$

2. $\sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n 1 = \frac{n(n+1)}{2}$

5)

Injections et surjections, fonctions réciproques, ensembles dénombrables

Exercices à résoudre à domicile, correction

Injections et surjections

Exercice 9. Parmi les fonctions ci-dessous, lesquelles sont injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : n \mapsto 2n$

2. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : n \mapsto -n$

3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$

5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ : x \mapsto x^2$

Solution :

1. Injection

2. Bijection

3. Ni injection, ni surjection

4. Bijection

5. Surjection

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}_0 : (p, q) \mapsto 2^p(2q + 1)$. Démontrer que f est une bijection. En déduire une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

Solution : Une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ est donnée par $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} : (p, q) \mapsto 2^p(2q + 1) - 1$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Q} : (p, q) \mapsto p + \frac{1}{q}$. La fonction f est-elle injective ? Surjective ?

Solution : La fonction est injective mais elle n'est pas surjective.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. La fonction f est-elle injective ? Surjective ?

2. Démontrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

3. Démontrer que la restriction $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Solution :

1. f n'est pas injective puisque $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$. De plus, f n'est pas non plus surjective puisque, par exemple, 2 n'a pas d'antécédent : en effet, pour $y = 2$

$$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 2 &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \frac{2x}{1+x^2} = 2 \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 1 = 0 \end{aligned}$$

ce qui est impossible puisque le réalisant $\Delta = (-1)^2 - 4 = -3$ est strictement négatif!

2. On a successivement

$$\begin{aligned}
 y \in f(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : yx^2 - 2x + y = 0 \quad (\star) \\
 &\Leftrightarrow \Delta = (-2)^2 - 4y^2 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow 1 - y^2 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow |y| \leq 1 \\
 &\Leftrightarrow y \in [-1, 1]
 \end{aligned}$$

ce qui démontre bien l'égalité annoncée.

3. En tenant compte de ce qui précède, on sait déjà que si $y \in [-1, 1] = f(\mathbb{R})$, alors $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$ et il suffit donc de montrer qu'on peut trouver un tel x est dans $[-1, 1] = \text{dom}(g)$ pour montrer que g est bien surjective. Or, les solutions de l'équation $(\star)$ sont données, pour $y \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, par

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{1 - y^2}}{2y} = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}$$

et, en étudiant ces deux valeurs, on constate que $x_1 \in [-1, 1]$. De plus, si $y = 0$, alors l'unique solution de $(\star)$ est $x = 0 \in [-1, 1]$. Par conséquent, $\forall y \in [-1, 1], \exists x \in [-1, 1] : g(x) = f(x) = y$, ce qui traduit la surjectivité de g .

En outre, en constatant que $\forall y \in [-1, 1] \setminus \{0\} : x_2 \notin [-1, 1]$, on en déduit que, pour de tels y , l'équation $(\star)$ possède une unique solution¹ et donc que g est bien injective (en effet, sinon, il existerait un $y \in [-1, 1]$ tel que l'équation $y = f(x)$ aurait plusieurs solutions, ce qui contredit ce que nous venons de prouver).

On en conclut finalement que g est bien bijectif.

Exercice 13. Soient A, B, C et D quatre ensembles et soient des fonctions $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$. Démontrer que si $g \circ f$ est surjectif, alors g est surjectif.

Exercice 14. Soit a un paramètre réel strictement positif. Construire des ensembles infinis $A, B \subseteq \mathbb{R}$ pour que la fonction f définie par

$$f : A \rightarrow B : x \mapsto ax^2 - 2a(a+1)x + a^2(a+2)$$

soit bijective.

Solution : Quelques possibilités pour les ensembles A et B sont :

- (a) $A = [a+1, +\infty[$ et $B = [-a, +\infty[$
- (b) $A =]-\infty, a+1]$ et $B = [-a, +\infty[$.

Fonctions réciproques

Exercice 15. Montrer que les fonctions suivantes sont bijectives et trouver leur réciproque.

a) $f : [0, +\infty[\rightarrow [3, +\infty[: x \mapsto x^2 + 3$

d) $f :]-1, +\infty[\rightarrow]-\infty, 1[: x \mapsto \frac{x}{1+x}$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{3}x + 3$

e) $f :]-\infty, 0] \rightarrow]-1, 1] : x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$

c) $f : [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[: x \mapsto \exp(\ln^2(x))$

1. Notons qu'en constatant ce fait, on peut alors définir correctement la fonction

$$g^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1], y \mapsto \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

qui est la réciproque de g , ce qui assure que g est bijectif.

$$f) f :] - 3, +\infty[\rightarrow]0, 1] : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}}$$

Solution :

Fonctions réciproques :

$$a) f^{-1} : [3, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[: y \mapsto \sqrt{y-3}$$

$$d) f^{-1} :] - \infty, 1[\rightarrow] - 1, +\infty[: y \mapsto \frac{y}{1-y}$$

$$b) f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto 3y - 9$$

$$e) f^{-1} :] - 1, 1] \rightarrow] - \infty, 0] : y \mapsto -\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}$$

$$c) f^{-1} : [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[: y \mapsto \exp(\sqrt{\ln(y)})$$

$$f) f^{-1} :]0, 1] \rightarrow] - 3, +\infty[: y \mapsto -3 + \sqrt{-1 + \frac{1}{y^2}}$$

Exercice 16. Démontrer que si les fonctions $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ sont bijectives, alors leur composée $g \circ f$ également et que, dans ce cas, on a

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Exercice 17. Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On définit

$$f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) : X \mapsto (X \cap A, X \cap B).$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour sur A et B pour que f soit bijective. Donner dans ce cas la bijection réciproque.

Solution :

3. f est bijective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$. La bijection réciproque est

$$f^{-1} : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(E) : (Y, Z) \mapsto Y \cup Z.$$

Ensembles dénombrables

Exercice 18. Démontrer les assertions suivantes.

1. Un ensemble A est dénombrable s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans A .
2. Si B est un ensemble dénombrable et s'il existe une surjection de B dans A , alors A est dénombrable.
3. Toute union d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, autrement dit si K est dénombrable et si A_k est dénombrable $\forall k \in K$, alors $\bigcup_{k \in K} A_k$ est dénombrable.

Exercice 19. Les ensembles suivant sont-ils dénombrables ?

- a) $\{2^n : n \geq 0\}$
- b) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$
- c) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$
- d) L'ensemble des nombres premiers.
- e) L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Solution :

- a) Dénombrable
- b) Non dénombrable
- c) Dénombrable
- d) Dénombrable
- e) Non dénombrable

Exercice 20. Une suite d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est dite stationnaire s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq p$, $n_k = n_p$. Démontrer que l'ensemble des suites d'entiers stationnaires est dénombrable.

Division euclidienne, PGCD et algorithme d'Euclide

Exercices à résoudre à domicile, correction

Exercice 6. Calculer le PGCD des nombres suivants ainsi que leur coefficients de Bézout au moyen de l'algorithme d'Euclide étendu.

1. 741 et 238

2. 375 et 1080

Solution :

1. $\text{pgcd}(741, 238) = 1$ et $97 \cdot 741 - 302 \cdot 238 = 1$

2. $\text{pgcd}(375, 1080) = 15$ et $8 \cdot 1080 - 23 \cdot 375 = 15$

Exercice 7. Montrer que les nombres $2n^2 + 10n + 13$ et $n + 3$ sont premiers entre eux pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Exercice 8. Démontrer que pour tout naturel n , l'entier $n^2(n^2 - 1)$ est divisible par 3, par 4 et par 12.

Exercice 9. Déterminer les couples d'entiers naturels a et b vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\text{pgcd}(a, b) = 12$ et $a + b = 720$

3. $\text{pgcd}(a, b) = 20$ et $\frac{a}{b} = \frac{24}{15}$

2. $\text{pgcd}(a, b) = 18$ et $ab = 6480$

Solution :

1. $S = \{(12, 708), (84, 636), (132, 588), (156, 564), (204, 516), (228, 492), (276, 444), (348, 372)\}$

2. $S = \{(18, 360), (72, 90)\}$

3. $S = \{(160, 100)\}$

Exercice 10. Soient a et b deux naturels non nuls. Montrer que a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, a et b^2 sont premiers entre eux.

Exercice 11. Montrer que si a , b et c sont trois naturels non nuls avec a et c premiers entre eux, alors on a $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, bc)$.

Exercice 12. Un vendeur dispose d'un stock inventu de 355 cartes mémoires et de 284 clés USB. Il souhaite dès lors créer un maximum de packs promotionnels identiques contenant au moins une carte et une clé, de manière à écouler l'entièreté du stock.

Combien de packs peut-il réaliser ? Combien de cartes mémoires et de clés USB contiendra chaque pack ?

Solution :

Le vendeur peut réaliser 71 packs contenant 5 cartes mémoires et 4 clés USB.

Exercice 13. En Province de Liège, la Fédération de pétanque compte 5376 joueurs, dont 2304 femmes. Le Comité de cette Fédération désire organiser un tournoi mixte (chaque équipe devra contenir au moins un homme et une femme) et tient à ce que tous les joueurs fédérés puissent y participer s'ils le souhaitent. Quel est le nombre maximum d'équipes qui pourraient alors être formées ? Quelle serait, dans ce cas, la composition des équipes ?

Solution :

Il est possible de forer 768 équipes composées de 4 hommes et 3 femmes.

Equations diophantines

Exercices à résoudre à domicile, correction

Equations diophantines

Exercice 7. Trouver toutes les solutions des équations suivantes dont les inconnues sont $x, y \in \mathbb{Z}$.

1. $3x - 5y = 13$

4. $533x + 117y = 65$

2. $12x + 36y = 126$

5. $56x + 30y = 2$

3. $212x + 45y = 3$

6. $14x + 77y = 0$

Solution :

1. $S = \{(1 + 5k, 3k - 2), \quad k \in \mathbb{Z}\}$

4. $S = \{(10 - 9k, 45 - 41k), \quad k \in \mathbb{Z}\}$

2. $S = \emptyset$

5. $S = \{(7 - 15k, -13 + 28k), \quad k \in \mathbb{Z}\}$

3. $S = \{(45k - 21, 99 - 212k), \quad k \in \mathbb{Z}\}$

6. $S = \{(-11k, 2k), \quad k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 8. Déterminer tous les pixels de coordonnées (x, y) entières vérifiant exactement l'équation cartésienne de droite $14x + 5y = 9$.

Solution : $(x, y) = (-1 + 5k, 3 - 14k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 9. Le professeur du cours d'informatique désire répartir ses 101 étudiants en deux types de groupes différents, comptant chacun entre 6 et 10 étudiants.

1. Si les groupes du premier type comportent 6 étudiants, combien d'étudiants doivent compter ceux du second type pour pouvoir répartir tous les étudiants dans ces deux types de groupes ? Justifier.
2. Combien de répartitions différentes en ces deux types de groupes le professeur va-t-il pouvoir faire ? Justifier.
3. Sachant qu'il veut maximiser le nombre de groupes de 6 étudiants, quelle est la répartition à choisir ? Justifier.

Solution :

1. Soient x et y les nombres de groupes du premier et du second type respectivement. Si on note N le nombre d'étudiants des groupes du second tupe, on veut que $6x + Ny = 101$. Or, cette équation admet des solutions entières si, et seulement si, $\text{pgcd}(6, N)$ divise 101. Dès lors, puisque 101 est premier, il faut que ce pgcd soit égal à 1 et le seul $N \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$ convenable est donc $N = 7$.
2. Les solutions de l'équation ci-dessus sont les couples $(-101 + 7k, 101 - 6k)$ où $k \in \mathbb{Z}$. En tenant compte du fait que x et y doivent être positifs, il y a donc 2 répartitions possibles en des groupes de 6 et 7 étudiants.
3. Il faut choisir la répartition en 11 groupes de 6 étudiants et 5 groupes de 7.

Exercice 10. Saint-Nicolas se prépare à récompenser les 256 enfants d'une école. Pour ce faire, il dispose d'un budget de 1 euro par élève et, en tant que bon samaritain, se doit de dépenser l'entièreté du budget en friandises. Sachant qu'une gaufre aux fruits lui coûte 5 euros, qu'un paquet de chiques revient à 3 euros et que trois mandarines lui sont facturées 1 euro, déterminer le nombre de friandises de chaque sorte qui seront servies aux enfants si Saint-Nicolas désire maximiser le nombre d'élèves recevant une mandarine.

Solution : Saint-Nicolas doit distribuer 256 friandises et dépenser son budget de 256 euros en maximisant le nombre de mandarines distribuées. Il distribuera donc 36 gaufres, 1 paquet de chiques et 219 mandarines.

Exercice 11. Un formateur a organisé une séance de formation à distance et ne peut malheureusement pas connaître le nombre de participants car le système a buggué. Néanmoins, il sait que chaque participant doit se logger via un mot de passe codé sur 8 bits, alors que les formateurs disposent quant à eux d'un mot de passe codé sur 13 bits. Sachant que le nombre total de bits utilisés pour coder les mots de passe qui ont permis l'accès à la séance s'élève à 1000 bits, qu'au moins un formateur s'est connecté et qu'il y a au maximum 10 formateurs par séance, quel fut le nombre de participants à cette dernière séance ?

Solution : Il y a eu 112 participants et 8 formateurs.

Exercice 12. Pour récolter des fonds et éviter que les étudiants ne doivent payer les frais d'organisation des laboratoires d'informatique, la Faculté des Sciences Appliquées a mis en vente des gadgets (décapsuleurs, ecocups, alcootests) portant le nouveau logo ULiège via un système de tickets à 3 euros. Le tarif était d'un ticket pour un décapsuleur ou un ecocup et de 2 tickets pour un alcootest. Au total, 100 tickets ont été vendus et utilisés au sein du Conseil de Faculté. Le bénéfice réalisé est de 1.4 euros par décapsuleur, de 1 euro par ecocup et de 3 euros par alcootest, un bénéfice total de 110 euros ayant été dégagé. Déterminer le nombre de décapsuleurs, d'ecocups et d'alcootests qui ont été vendus. Combien de solutions différentes à ce problème existe-t-il ?

Solution : Il y a 6 solutions.

Exercice 13. Un informaticien construit un programme contenant deux boucles itératives : chaque itération de la première ajoute 56 ko de données à la mémoire centrale, et 91 ko sont ajoutés par chacune de la seconde. Il a conçu le programme de manière à ce que la mémoire nouvellement occupée après son exécution n'excède pas 7005 ko.

1. Au maximum, quelle quantité de mémoire sera réellement nouvellement occupée après l'exécution de ce programme ? Justifier.
2. Est-il possible que les boucles s'effectuent en parallèle du début à la fin du programme, c'est-à-dire les nombres d'itérations de chaque boucle peuvent-ils être égaux ? Justifier.
3. Au minimum, quel est le nombre total d'itérations (pour les deux boucles combinées) exécutées par le programme ? Justifier.

Solution :

1. Soit x le nombre d'itérations de la première boucle et y celui de la seconde. On cherche donc le plus grand nombre $N \leq 7005$ tel que $56x + 91y = N$. Or, cette équation n'admet des solutions entières que si $\text{pgcd}(56,91) = 7$ divise N . Le nombre N de ko cherché est donc le plus grand multiple de 7 inférieur à 7005, soit $N = 7000$ ko.
2. Les solutions de l'équation $56x + 91y = 7000$ sont les couples $(5000 + 13k, 3000 - 8k)$ où $k \in \{-384, -385\}$, en tenant compte du fait que x et y doivent être positifs. Il suffit alors de constater que $x = y$ est impossible quel que soit $k \in \mathbb{Z}$.
3. Au minimum, il y aura 8 itérations pour la première boucle et 72 pour la seconde, soit un total de 80 itérations (Cas où $k = -384$).

8)

Numération en base entière

Exercices à résoudre à domicile, correction

Exercice 8. Donner le plus petit et le plus grand nombres (écrits dans la base décimale) ayant 3 chiffres dans le système en base 9.

Solution :

Le plus petit correspond à $(100)_9$, soit $9^2 = 81$.

Le plus grand correspond à $(888)_9$, soit $8 \times 9^2 + 8 \times 9 + 8 = 728$ (Notons que le plus grand à 3 chiffres peut aussi être obtenu en soustrayant 1 au plus petit à 4 chiffres, soit $9^3 - 1 = 728$).

Exercice 9. Quelle est la représentation de

1. 518 en base 7 ?

2. 2567 en base 9 ?

Solution :

1. $(1, 3, 4, 0)_7$

2. $(3, 4, 6, 2)_9$

Exercice 10. A quels nombres correspondent les représentations suivantes ?

1. $(50413)_7$

2. $(4, 9, 11, 2)_{13}$

Solution :

1. 12211

2. 10454

Exercice 11. On considère un nombre N dont l'écriture en base 4 est 13022.

1. Quelle est son écriture en base 2 ?

2. Quelle est son écriture en base 8 ?

3. Quelle est son écriture en base 16 ?

Solution :

1. N correspond à $(111001010)_2$.

2. N correspond à $(712)_8$.

3. N correspond à $(1, 12, 10)_{16}$.

Exercice 12. Sans passer par la base 10 effectuer les opérations suivantes :

1. $(41302)_5 + (3410)_5$

3. $(261)_7 \cdot (63)_7$

2. $(45380)_9 - (6781)_9$

4. $(5420632)_6 / (43)_6$

Solution :

1. $(1, 0, 0, 2, 1, 2)_5$

3. $(2, 4, 3, 3, 3)_7$

2. $(3, 7, 4, 8, 8)_9$

4. $(1, 1, 3, 4, 5, 2)_6$

9)

Arithmétique modulaire

Exercices à résoudre à domicile, correction

Exercice 5. Représenter la table de la multiplication dans $\mathbb{Z}_9$ et en déduire, lorsqu'ils existent, les inverses dans $\mathbb{Z}_9$ des éléments de $\mathbb{Z}_9$.

Solution : Les nombres possédant un inverse dans $\mathbb{Z}_9$ sont $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$. Les inverses de ces nombres sont respectivement $\{1, 5, 7, 2, 4, 8\}$.

$\cdot_8$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	4	6	8	1	3	5	7
3	0	3	6	0	3	6	0	3	6
4	0	4	8	3	7	2	6	1	5
5	0	5	1	6	2	7	3	8	4
6	0	6	3	0	6	3	0	6	3
7	0	7	5	3	1	8	6	4	2
8	0	8	7	6	5	4	3	2	1

Exercice 6. Calculer, s'il existe, l'inverse de

1. 11 dans $\mathbb{Z}_{26}$

2. 162 dans $\mathbb{Z}_{217}$

Solution :

1. 19

2. 71

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes :

1. $4x + 2 = 0$ dans $\mathbb{Z}_{11}$

3. $4x = 10$ dans $\mathbb{Z}_{26}$

2. $4x = 10$ dans $\mathbb{Z}_{20}$

Solution :

1. $S = \{5\}$

3. $S = \{9, 22\}$

2. $S = \emptyset$

Exercice 8. Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 6x + 7y = 5 \\ 8x - y = 4 \end{cases}$ dans $\mathbb{Z}_{12}$

3. $\begin{cases} 2x + 6y = 3 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$ dans $\mathbb{Z}_{17}$

2. $\begin{cases} 7x + 6y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ dans $\mathbb{Z}_{18}$

Solution :

1. $S = \emptyset$

3. $S = \{(12, 5)\}$

2. $S = \{(15, 4), (15, 13)\}$

Exercice 9. Résoudre les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} 2x + 5y + z = 3 \\ 4x - 5y + 6z = 8 \\ 6x + 9y - 3z = 7 \end{cases} \text{ dans } \mathbb{Z}_{10} \qquad 2. \begin{cases} x - 2y + 3z = 7 \\ 8x + 9y + 6z = 3 \\ 2x + 4y - z = 9 \end{cases} \text{ dans } \mathbb{Z}_{20}$$

Solution :

$$1. S = \{(0, 4, 3), (5, 4, 3)\} \qquad 2. S = \{(12, 9, 11)\}$$

Exercice 10. En utilisant l'arithmétique modulaire, répondre aux questions suivantes.

1. Nous sommes aujourd'hui mardi, quel jour serons-nous dans 30 jours ?
2. Un paquet est expédié un jour donné à 15h et met 67h pour arriver à destination : à quelle heure arrivera-t-il le jour de livraison ?
3. A quel angle compris entre 0° et 360° correspond un angle de -750° sur le cercle trigonométrique ?

Solution :

1. En associant lundi, mardi, ..., dimanche à 1, 2, ..., 7 respectivement, le jour cherché correspond alors à $\text{MOD}(2 + 30, 7) = 4$: nous serons donc jeudi.
2. Le paquet sera livré à 10h (puisque $\text{MOD}(15 + 67, 24) = 10$).
3. L'angle correspond à 330° (puisque $\text{MOD}(-750, 360) = 330$).

Exercice 11. Un informaticien décide de crypter ses messages lettre par lettre. Pour ce faire, il assimile les lettres de l'alphabet A, B, C, ..., Z aux nombres 0, 1, 2, ..., 25 respectivement et utilise la fonction de codage suivante :

$$f : \mathbb{Z}_{26} \rightarrow \mathbb{Z}_{26}, x \mapsto \text{MOD}(9x, 26)$$

1. Déterminer le codage correspondant au mot HELP.
2. Montrer que cette fonction est bijective.
3. Déterminer la fonction de décodage correspondante, c'est-à-dire sa fonction réciproque.
4. Décoder le mot JXAHW.
5. Il finit par se dire qu'il aurait aussi pu coder l'espace (entre les mots) par le nombre 26 et travailler alors avec

$$g : \mathbb{Z}_{27} \rightarrow \mathbb{Z}_{27}, x \mapsto \text{MOD}(9x, 27)$$

Est-ce une bonne idée ?

Solution :

1. L'image par la fonction de codage f de
 - 7 (c.-à-d. H) est $\text{MOD}(9 \times 7, 26) = 9$, ce qui mène à la lettre L,
 - 4 (c.-à-d. E) est $\text{MOD}(9 \times 4, 26) = 10$, ce qui mène à la lettre K,
 - 11 (c.-à-d. L) est $\text{MOD}(9 \times 11, 26) = 21$, ce qui mène à la lettre V,
 - 15 (c.-à-d. P) est $\text{MOD}(9 \times 15, 26) = 5$, ce qui mène à la lettre F,
 de sorte que le codage du mot HELP est LKVF.
2. Puisque 9 est premier avec 26, 9 est inversible dans $\mathbb{Z}_{26}$, ce qui assure que, pour tout $y \in \mathbb{Z}_{26}$, l'équation $f(x) = y$, qui équivaut à $\text{MOD}(9x, 26) = y$ ou encore à $9 \cdot_{26} x = y$, possède une solution (ce qui entraîne la surjectivité de f) et une seule (ce qui assure l'injectivité de f). Donc, la fonction f est bien bijective.
3. Pour déterminer la réciproque de f , il faut déterminer x dans l'équation $f(x) = y$ pour $y \in \mathbb{Z}_{26}$. Comme $9 \times 3 = 27 = 26 + 1$, l'inverse de 9 dans $\mathbb{Z}_{26}$ est 3 (en effet, $9 \cdot_{26} 3 = \text{MOD}(27, 26) = 1$). De là, il vient successivement

$$9 \cdot_{26} x = y \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot_{26} 9 \cdot_{26} x = 3 \cdot_{26} y \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \cdot_{26} y.$$

Ainsi, la réciproque de f est $f^{-1} : \mathbb{Z}_{26} \rightarrow \mathbb{Z}_{26}, y \mapsto \text{MOD}(3y, 26)$.

4. En procédant comme au premier item avec la fonction f^{-1} cette fois, on obtient le mot BRAVO.

5. Non, ce n'est pas une bonne idée car 9 n'est pas premier avec 27 et n'est donc pas inversible dans $\mathbb{Z}_{27}$: la fonction g n'est alors pas bijective et on ne pourra donc pas déterminer de fonction de décodage.

Exercice 12. Démontrer qu'un nombre naturel (en base décimale) est divisible par 9 si, et seulement si, la somme des chiffres qui le composent est elle-même divisible par 9.

Sugg. : utiliser le binôme de Newton pour exprimer $10^n = (9 + 1)^n$ en fonction de 9.

Solution :

Soit N un naturel donné par

$$\sum_{k=0}^n c_k 10^k \quad \text{où } n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \{0, \dots, n\} : c_k \in \{0, \dots, 9\}.$$

En utilisant le binôme de Newton pour exprimer les puissances de 10, on a

$$10^k = (9 + 1)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i 9^i 1^{k-i} = \sum_{i=0}^k C_k^i 9^i = C_k^0 9^0 + \sum_{i=1}^k C_k^i 9^i = 1 + \sum_{i=1}^k C_k^i 9^i \quad (\star)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \text{MOD} \left(\sum_{k=0}^n c_k 10^k, 9 \right) = 0 & \Leftrightarrow \text{MOD} \left(\sum_{k=0}^n c_k \left(1 + \sum_{i=1}^k C_k^i 9^i \right), 9 \right) = 0 \quad (\text{vu } (\star)) \\ & \Leftrightarrow \text{MOD} \left(\sum_{k=0}^n c_k + c_k \sum_{i=1}^k C_k^i 9^i, 9 \right) = 0 \quad (\text{en distribuant } c_k) \\ & \Leftrightarrow \text{MOD} \left(\sum_{k=0}^n c_k + 9c_k \sum_{i=1}^k C_k^i 9^{i-1}, 9 \right) = 0 \quad (\text{en mettant } 9 \text{ en évidence}) \\ & \Leftrightarrow \text{MOD} \left(\sum_{k=0}^n c_k, 9 \right) = 0. \end{aligned}$$

D'où la conclusion.

Convention pour les deux prochains exercices :

On notera $\overline{c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0}$ le nombre entier N dont la représentation en base 10 est $c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0$, autrement dit

$$\overline{c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0} = \sum_{i=0}^n c_{n-i} 10^{n-i} = \sum_{i=0}^n c_i 10^i$$

Exercice 13. 1. Démontrer que $\text{MOD}(10^3, 13) = \text{MOD}(-1, 13)$.

2. En déduire que les entiers définis par

$$x = \overline{c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0} \quad \text{et} \quad y = \overline{c_2 c_1 c_0} - \overline{c_5 c_4 c_3} + \overline{c_8 c_7 c_6} - \dots + (-1)^{\frac{n-2}{3}} \overline{c_n c_{n-1} c_{n-2}}$$

(en ajoutant un ou deux zéros en tête de l'écriture décimale si $n + 1$ n'est pas un multiple de 3) sont tels que x est multiple de 13 si, et seulement si, y l'est.

3. Appliquer ce critère de divisibilité pour déterminer si 162756425 est divisible par 13.

Solution :

- L'égalité a lieu ssi $10^3 + 1$ est un multiple de 13, ce qui est bien le cas ! ($1001 = 77 \times 13$)
- L'écriture décimale de x peut être modifiée en groupant les termes 3 par 3 et en mettant en évidence la plus haute puissance de 10 pour chaque groupe :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^n c_i 10^i = c_0 + c_1 10 + \dots + c_n 10^n \\ &= c_0 + c_1 10 + c_2 10^2 + (c_3 + c_4 10 + c_5 10^2) 10^3 + (c_6 + c_7 10 + c_8 10^2) (10^3)^2 + \dots \\ &\quad + (c_{n-2} + c_{n-1} 10 + c_n 10^2) (10^3)^{\frac{n-2}{3}} \\ &= \overline{c_2 c_1 c_0} + \overline{c_5 c_4 c_3} 10^3 + \overline{c_8 c_7 c_6} (10^3)^2 + \dots + \overline{c_n c_{n-1} c_{n-2}} (10^3)^{\frac{n-2}{3}} \quad (\star) \end{aligned}$$

Tenant compte du point précédent, on a alors successivement

$$\begin{aligned} & \text{MOD}(x, 13) = 0 \\ \stackrel{(\text{vu } \star)}{\Leftrightarrow} & \text{MOD}\left(\overline{c_2 c_1 c_0} + \overline{c_5 c_4 c_3} 10^3 + \overline{c_8 c_7 c_6} (10^3)^2 + \cdots + \overline{c_n c_{n-1} c_{n-2}} (10^3)^{\frac{n-2}{3}}, 13\right) = 0 \\ \stackrel{(\text{vu } 1.)}{\Leftrightarrow} & \text{MOD}\left(\overline{c_2 c_1 c_0} + \overline{c_5 c_4 c_3} (-1) + \overline{c_8 c_7 c_6} (-1)^2 + \cdots + \overline{c_n c_{n-1} c_{n-2}} (-1)^{\frac{n-2}{3}}, 13\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \text{MOD}(y, 13) = 0. \end{aligned}$$

3. Tenant compte du critère établi en 2., le nombre considéré est divisible par 13 ssi il en va de même de $425 - 756 + 162 = -169$. Or, $-169 = -13^2$ est divisible par 13 : donc, le nombre donné est bien divisible par 13.

Exercice 14. Jusqu'en 2007, l'identification de livres selon le système ISBN 10 (International Standard Book Number) était obtenue en associant à chaque ouvrage un code unique de 9 chiffres du type

$$\overline{c_1 c_2 \cdots c_9} \quad \text{où} \quad \forall i \in \{1, \dots, 9\} : c_i \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

Pour détecter d'éventuelles erreurs d'encodage, on ajoutait une clé de contrôle c_{10} calculée selon

$$c_{10} = \text{MOD}\left(\sum_{i=1}^9 i c_i, 11\right).$$

Si le résultat de c_{10} était égal à 10, la clé de contrôle était représentée par le symbole $\times$.

1. Sachant que $0 \leq c_{10} \leq 10$, démontrer que

$$c_{10} = \text{MOD}\left(\sum_{i=1}^9 i c_i, 11\right) \quad \Leftrightarrow \quad \text{MOD}\left(\sum_{i=1}^{10} i c_i, 11\right) = 0. \quad (\clubsuit)$$

2. Déterminer la clé de contrôle du livre dont le code est 287114244. Ce code est-il valable ?
3. Démontrer que si on commet une erreur d'encodage en permutant 2 caractères parmi les 10 formant le code ISBN 10, alors le caractère de contrôle ne sera plus correct au vu de la condition $(\clubsuit)$, ce qui permettra de conclure qu'une erreur a été commise.

Solution :

1. Comme $0 \leq c_{10} \leq 10$, on a successivement

$$\begin{aligned} c_{10} = \text{MOD}\left(\sum_{i=1}^9 i c_i, 11\right) & \Leftrightarrow c_{10} +_{11} (10 \cdot_{11} c_{10}) = \text{MOD}\left(\left[\sum_{i=1}^9 i c_i\right] +_{11} (10 \cdot_{11} c_{10}), 11\right) \\ & \Leftrightarrow 11 \cdot_{11} c_{10} = \text{MOD}\left(\sum_{i=1}^{10} i c_i, 11\right) \\ & \Leftrightarrow 0 = \text{MOD}\left(\sum_{i=1}^{10} i c_i, 11\right) \end{aligned}$$

2. La clé de contrôle du code considéré est

$$\begin{aligned} c_{10} &= \text{MOD}\left(\sum_{i=1}^9 i c_i, 11\right) \\ &= \text{MOD}(1 \times 2 + 2 \times 8 + 3 \times 7 + 4 \times 1 + 5 \times 1 + 6 \times 4 + 7 \times 2 + 8 \times 4 + 9 \times 4, 11) \\ &= \text{MOD}(154, 11) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque $154 = 14 \times 11$. De là, la condition de validité $(\clubsuit)$ est clairement satisfaite et le code est valable.

3. Si on permute les caractères c_j et c_k (avec $j \neq k$ et $c_j \neq c_k$; sinon, aucun changement) dans le code $\overline{c_1 c_2 \cdots c_9 c_{10}}$, alors on obtient le code erroné

$$\overline{c'_1 c'_2 \cdots c'_9 c'_{10}} \quad \text{où} \quad \begin{cases} c'_j = c_k \\ c'_k = c_j \\ c'_i = c_i \quad \forall i \in \{1, \dots, 10\} \setminus \{j, k\} \end{cases}$$

En tenant compte du fait que le code $\overline{c_1 c_2 \cdots c_9 c_{10}}$ est valable, et que donc la condition ($\clubsuit$) suivante est satisfaite

$$\text{MOD} \left(\sum_{i=1}^{10} i c_i, 11 \right) = 0,$$

on a successivement

$$\begin{aligned} \text{MOD} \left(\sum_{i=1}^{10} i c'_i, 11 \right) = 0 &\Leftrightarrow \text{MOD} \left(\sum_{i=1}^{10} i c_i + j c'_j + k c'_k - j c_j - k c_k, 11 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{MOD} (j c_k + k c_j - j c_j - k c_k, 11) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{MOD} (j(c_k - c_j) + k(c_j - c_k), 11) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{MOD} ((j - k)(c_k - c_j), 11) = 0 \end{aligned}$$

Or, d'une part, puisque 11 est premier, le produit $(j-k)(c_k-c_j)$ ne peut être divisible par 11 que si au moins l'un des facteurs est divisible par 11, et d'autre part, comme $j, k \in \{1, \dots, 10\}$ et $c_j, c_k \in \{0, 1, \dots, 10\}$, on a

$$(j - k) \in \{-9, -8, \dots, 8, 9\} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad (c_k - c_j) \in \{-10, -9, \dots, 9, 10\} \setminus \{0\}$$

de sorte qu'aucun de ces nombres ne peut donc être un multiple de 11. Dès lors, la dernière membre de l'équivalence ci-dessus est fautive et la condition ($\clubsuit$) n'est pas satisfaite pour le code $\overline{c'_1 c'_2 \cdots c'_9 c'_{10}}$: ce dernier n'est donc pas valable.

En conclusion, permuter deux caractères dans un code ISBN 10 mène à un code non valable.

Exercices à résoudre à domicile, correction

Exercice 8. On considère les matrices A, B, C décrites ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2+i & -i \\ -5 & 3i & 4+3i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ 2 & 0 \\ i & 4+i \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3i & -4i \end{pmatrix}$$

Effectuer, si possible, les opérations suivantes et simplifier au maximum le résultat obtenu. Lorsqu'une opération n'est pas définie, expliquer pourquoi.

1. B^*
2. $\tilde{C}$
3. $A+B$
4. BA
5. C^3
6. $(AB)^{\sim} + C$

Solution :

1. $B^* = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & -i \\ -i & 0 & 4-i \end{pmatrix}$
2. $\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3i \\ -2 & -4i \end{pmatrix}$
3. $A+B$ n'est pas défini.
En effet, $\dim(A) \neq \dim(B)$.
4. $BA = \begin{pmatrix} 2-7i & -i & -4+3i \\ 4 & 4+2i & -2i \\ -20-3i & -4+14i & 14+16i \end{pmatrix}$
5. $C^3 = \begin{pmatrix} -23-12i & 30+20i \\ 30-45i & -48+58i \end{pmatrix}$
6. $(AB)^{\sim} + C = \begin{pmatrix} 8 & -10+15i \\ 1+i & 13+7i \end{pmatrix}$

Exercice 9. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 2+i & -1 \\ 0 & 1 & i \\ 3i & 1-i & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A^3 - (1+2i)A^2 - (1-4i)A + (4+2i)I = 0$.

Exercice 10. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
2. $C = \begin{pmatrix} 2i & 3+i & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 2 & 1-i \end{pmatrix}.$

Solution :

1. Les matrices qui commutent avec A sont de la forme

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix}$$

avec $x, y \in \mathbb{C}$.

2. Les matrices qui commutent avec C sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 6a & 6b & 6c \\ 0 & 6a + (5+i)b - (4+10i)c & 0 \\ -3ic & -(4+10i)b + (7+17i)c & 6a + (3-9i)c \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Exercice 11. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs ».

- 60% des descendants de fumeurs sont des fumeurs.
- 10% des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

À la génération 1, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs. Décrire, à l'aide des matrices, le taux de fumeurs et de non-fumeurs à la génération n avec $n \in \mathbb{N}_0$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}_0$, si l'on note respectivement F_n et NF_n les proportions de fumeurs et non fumeurs à la génération n , on a

$$\begin{pmatrix} F_n \\ NF_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires. 20% des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie. Sachant qu'en l'année 0, un quart des habitants sont en X , calculer la population de X et de Y au bout de 1, 2 et 5 ans.

Solution : Si l'on note respectivement n_X et n_Y le nombre d'habitants des villes X et Y , on a :

- après 1 an $n_X = 387500$ et $n_Y = 612500$;
- après 2 ans $n_X = 490625$ et $n_Y = 509375$;
- après 5 ans $n_X = 669482$ et $n_Y = 330518$.

Déterminants et inverses de matrices

Exercices à résoudre à domicile, correction

Déterminants

Exercice 7. Calculer les déterminants suivants :

$$1. D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3i & -4i \end{vmatrix}$$

$$3. D_3 = \begin{vmatrix} 2i & 3+i & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 2 & 1-i \end{vmatrix}$$

$$5. D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2. D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$4. D_4 = \begin{vmatrix} 2i & 2+i & -1 \\ 0 & 1 & i \\ 4i & 1-i & 0 \end{vmatrix}$$

$$6. D_6 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

Solution :

1. $2i$	3. $2 + 4i$	5. -1
2. 67	4. $-6 - 2i$	6. 12

Exercice 8. Calculer et factoriser les déterminants suivants :

$$1. D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3. D_3 = \begin{vmatrix} a & 3b & 0 & 0 \\ b & a & 2b & 0 \\ 0 & 2b & a & b \\ 0 & 0 & 3b & a \end{vmatrix}$$

$$2. D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$4. D_4 = \begin{vmatrix} x & -y & -x & y \\ y & x & -y & x \\ z & -u & z & -u \\ u & z & u & z \end{vmatrix}$$

Solution :

1. $-(m-1)^2(m+2)$	3. $(a-3b)(a-b)(a+b)(a+3b)$
2. $(x-y)(y-z)(z-x)$	4. $4y^2(u^2+z^2)$

Exercice 9. Déterminer les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ qui annulent le déterminant suivant :

$$D_2 = \begin{vmatrix} -7iz^2 - z & 2 & 1 \\ 1 & i & 0 \\ 4z^2 - z & -7/4 & -1 \end{vmatrix}$$

Solution :

$$S = \left\{ \frac{2+i}{10}, \frac{-2+3i}{26} \right\}$$

Inverses de matrices

Exercice 10. Si possible, inverser les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 5+i & 1-i \\ 4 & 2+7i \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

6. $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} i & -i & 1+i \\ i & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $E = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 2i \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3+2i & 4 \end{pmatrix}$

7. $G = \begin{pmatrix} 0 & 2+i & -3 & 1 \\ 4-3i & 1 & 2i & 0 \\ 1+i & 0 & 4 & 2 \\ 2+i & 3 & i & 1 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Solution :

1. $A^{-1} = \frac{1}{1682} \begin{pmatrix} 285 - 89i & 42 + 40i \\ 4 + 164i & 36 - 206i \end{pmatrix}$

4. D^{-1} n'est pas défini.

2. $B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2i & -3-i & 1+3i \\ 2i & 1-i & 1-i \\ 0 & 2+2i & 2-2i \end{pmatrix}$

5. $E^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2+2i & 5-i & 1-i \\ 6+6i & -1-3i & 3-3i \\ -2-8i & -2+3i & i \end{pmatrix}$

3. $C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & -4 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. $F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

7. $G^{-1} = \frac{1}{6404} \begin{pmatrix} -254 + 554i & 780 + 820i & 80 + 2i & 94 - 558i \\ -886 + 218i & -456 - 972i & -1032 - 346i & 2950 + 474i \\ -1598 - 120i & 16 - 640i & 289 - 353i & 1020 + 826i \\ 3600 + 90i & -12 + 480i & 2585 + 665i & -2366 - 1420i \end{pmatrix}$

Exercice 11. Déterminer pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{C}$ les matrices suivantes sont inversibles et donner leur inverse lorsqu'il est défini.

1. $A = \begin{pmatrix} m & 4 \\ 2 & 2m \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & \bar{m} & \bar{m}^2 \\ m & 1 & \bar{m} \\ m^2 & m & 1 \end{pmatrix}$

Solution :

1. $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$

3. $\det(C) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

$$A^{-1} = \frac{1}{2m^2-8} \begin{pmatrix} 2m & -4 \\ -2 & m \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{1-m^2} \begin{pmatrix} 3 & -3m & -1+m^2 \\ -m & 1 & 0 \\ -2 & 2m & 1-m^2 \end{pmatrix}$$

2. $\det(B) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ et $m \neq 3$

4. $\det(D) \neq 0 \Leftrightarrow |m| \neq 1$

$$B^{-1} = \frac{1}{m^2-4m+3} \begin{pmatrix} 3-m & m-3 & 0 \\ m^2-m-1 & 2-m & 1-m \\ 1-2m & 1 & m-1 \end{pmatrix} \quad D^{-1} = \frac{1}{1-|m|^2} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{m} & 0 \\ -m & 1+|m|^2 & -\bar{m} \\ 0 & -m & 1 \end{pmatrix}$$

*Exercices à résoudre à domicile, correction***Rang**

Exercice 9. Déterminer le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -13 \\ 3 & -3 & 15 \end{pmatrix}$$

Solution : $\text{rg}(A) = 2$.

Exercice 10. Discuter, en fonction du paramètre complexe m , le rang de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} m^2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & m & 1 & -1 \\ 1 & m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution : $\text{rg}(B) = 3 \quad \forall m \in \mathbb{C}$.

Systèmes linéaires

Exercice 11. En reprenant la matrice de l'exercice précédent, étudier en fonction du paramètre complexe m la compatibilité, et le caractère (in)déterminé, du système suivant d'inconnues $x, y, z, t \in \mathbb{C}$ (les solutions ne sont pas attendues) :

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m^2 \\ m^3 + 2 \\ 3m^9 - 7 \end{pmatrix}$$

Solution : Appelons b la matrice correspondant au terme indépendant de ce système.

Comme $\text{rg}(B) = 3 = \text{rg}(B|b)$ quel que soit $m \in \mathbb{C}$, le système est compatible quel que soit $m \in \mathbb{C}$. De plus, comme il y a 4 inconnues, le système est simplement indéterminé.

Exercice 12. Donner une condition sur les réels a, b et c constituant les triplets $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ de l'espace d'arrivée des fonctions suivantes pour que ces dernières soient surjectives.

$$1. f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$$

$$2. g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 3x + y + 4z \\ 5x - y + 8z \end{pmatrix}$$

$$3. f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3w + x - y + 2z \\ 3w + y + 4z \\ 6w + x + 6z \end{pmatrix}$$

Solution :

1. $5a - b - 2c = 0$.
2. $2a + b - c = 0$.
3. $a + b - c = 0$.

Exercice 13. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & b \\ a & c & d \end{pmatrix}.$$

1. Discuter la valeur du rang de la matrice M en fonction des paramètres réels a, b, c et d .
2. Déterminer, en fonction de a, b, c et d , tous les cas menant à la compatibilité du système

$$\begin{cases} x + y & = & 1 \\ ax + by & = & b \\ ax + cy & = & d \end{cases}$$

3. Dans chaque cas, déterminer les solutions de ce système.

Solution :

$$1. \operatorname{rg}(M) = \begin{cases} 3 & \text{si } a \neq b \text{ et } c \neq d \\ 1 & \text{si } a = b = c = d \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Appelons A la matrice des coefficients du système et B son terme indépendant.

- Si $a \neq b$ et $c \neq d$, alors $\operatorname{rg}(A) = 2 \neq \operatorname{rg}(A|B) = \operatorname{rg}(M) = 3$, de sorte que le système est incompatible.
- Si $a = b \neq c$, alors $\operatorname{rg}(A) = 2 = \operatorname{rg}(A|B) = \operatorname{rg}(M)$, de sorte que le système est compatible.
- Si $a = b = c \neq d$, alors $\operatorname{rg}(A) = 1 \neq \operatorname{rg}(A|B) = \operatorname{rg}(M) = 2$, de sorte que le système est incompatible.
- Si $a = b = c = d$, alors $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|B) = \operatorname{rg}(M) = 1$, de sorte que le système est compatible.

3. • Si $a \neq b$ et $c \neq d$, ou si $a = b = c \neq d$, alors $S = \emptyset$.

- Si $a = b \neq c$, alors $S = \left\{ \left(\frac{c-d}{c-a}, \frac{d-a}{c-a} \right) \right\}$.

- Si $a = b = c = d$, alors $S = \{(x, 1-x) : x \in \mathbb{C}\}$.

Exercice 14. Résoudre les systèmes d'équations suivants d'inconnues $x, y, z, u, v, t \in \mathbb{C}$.

$$1. \begin{cases} 2x - 3y + 6z & = & 3 \\ 4x - y + z & = & 1 \\ 3x - 2y + 3z & = & 4 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} -x + 2y + z + 3t & = & 6 \\ 7x + 2y - 13z + 3t & = & -24 \\ 3x + y - 5z - t & = & -12 \end{cases}$$

Solution :

1. $S = \left\{ \left(-\frac{6}{5}, -\frac{49}{5}, -4 \right) \right\}$.

2. $S = \left\{ \left(x, 0, \frac{15+4x}{7}, \frac{9+x}{7} \right) : x \in \mathbb{C} \right\}$.

Exercice 15. Résoudre les systèmes d'équations suivants d'inconnues $x, y, z, t \in \mathbb{C}$ en fonction des valeurs des paramètres réels a, b, c et d .

$$\begin{array}{lll}
 1. \begin{cases} ax + y = a \\ x + ay = -a \end{cases} & 4. \begin{cases} x + cy = c^2 \\ cx + y + z = 1 + c \\ x + cy + 2z = 3 \\ cx + y + 3z = c \end{cases} & 6. \begin{cases} x + y + z = b \\ ax + by + bz = a^2 \\ ax + cy + dz = ab \end{cases} \\
 2. \begin{cases} ax + by + cz = 1 \\ x + y + z = c \end{cases} & & \\
 3. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = b \\ x + 4y + 10z = b^2 \end{cases} & 5. \begin{cases} ax + by + bz + at = 1 \\ bx + ay + az + bt = 1 \\ x + y + z + t = c \end{cases} & 7. \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = a \\ x + ay + z = c \end{cases}
 \end{array}$$

Solution :

Si $|a| \neq 1$, $S = \{(0, 1)\}$;

1. si $a = -1$, $S = \{(x, x - 1) : x \in \mathbb{C}\}$;
 si $a = 1$, $S = \emptyset$.

Si $a = b = c$, $a = \pm 1$, $S = \{(x, y, a - x - y) : x, y \in \mathbb{C}\}$;

2. si $a = b = c$, $a \neq \pm 1$, $S = \emptyset$;
 si $a \neq b$, $S = \left\{ \left(\frac{z(b-c)+1-bc}{a-b}, \frac{z(c-a)+ac-1}{a-b}, z \right) : z \in \mathbb{C} \right\}$;
 si $a \neq c$, $S = \left\{ \left(\frac{y(c-b)+1-c^2}{a-c}, y, \frac{y(b-a)+ac-1}{a-c} \right) : y \in \mathbb{C} \right\}$.

Si $b = 1$ $S = \{(1 + 2z, -3z, z) : z \in \mathbb{C}\}$;

3. si $b = 2$ $S = \{(2z, 1 - 3z, z) : z \in \mathbb{C}\}$;
 si $b \neq 1, b \neq 2$ $S = \emptyset$.

Si $c = 2$ $S = \left\{ \frac{1}{2} (2, 3, -1) \right\}$;

4. si $c = -2$ $S = \left\{ -\frac{1}{2} (2, 5, 1) \right\}$;
 si $c^2 \neq 4$ $S = \emptyset$.

Si $a = b$, $ac = 1$, $S = \{(x, y, z, c - x - y - z) : x, y, z \in \mathbb{C}\}$;

5. si $a = b$, $ac \neq 1$, $S = \emptyset$;
 si $a \neq b$, $c(a + b) = 2$, $S = \left\{ \left(-t + \frac{1-ac}{b-a}, -z + \frac{bc-1}{b-a}, z, t \right) : z, t \in \mathbb{C} \right\}$;
 si $a \neq b$, $(a + b) \neq 2$, $S = \emptyset$.

- Si $a \neq b, c \neq d$, $S = \left\{ \left(a + b, \frac{a(a-d)}{d-c}, \frac{a(c-a)}{d-c} \right) \right\}$;
- si $a = b = c = d$, $S = \{(a - y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{C}\}$;
- si $a = b, a \neq c$, $S = \left\{ \left(a + \frac{z(d-c)}{c-a}, \frac{z(a-d)}{c-a}, z \right) : z \in \mathbb{C} \right\}$;
6. si $a = b, a \neq d$, $S = \left\{ \left(a + \frac{y(c-d)}{d-a}, y, \frac{y(a-c)}{d-a} \right) : y \in \mathbb{C} \right\}$;
- si $a \neq b, a \neq 0, a \neq c, c = d$, $S = \emptyset$;
- si $a \neq b, a = 0, c = d$, $S = \{(b, -z, z) : z \in \mathbb{C}\}$;
- si $a \neq b, a = c = d$, $S = \{(a + b, -a - z, z) : z \in \mathbb{C}\}$.
- Si $a \neq 0, a \neq 1, b \neq 1$, $S = \left\{ \left(\frac{a-bc}{a(b-1)}, \frac{a-c}{a(b-1)}, \frac{(a+1)(bc-a)}{a(b-1)} \right) \right\}$;
- si $a = 0, c \neq 0$, $S = \emptyset$;
- si $a = 0, c = 0$, $S = \{(yb - 1, y, 1 - yb) : y \in \mathbb{C}\}$;
7. si $a = b = c = 1$, $S = \{(x, y, 1 - x - y) : x, y \in \mathbb{C}\}$;
- si $a = b = 1, c \neq 1$, $S = \emptyset$;
- si $a \neq 1, b = 1, c = a$, $S = \{(x, 1 + x, -x(a + 1)) : x \in \mathbb{C}\}$;
- si $a \neq 1, b = 1, c \neq a$, $S = \emptyset$.

Exercice 16. Utiliser la méthode de Gauss pour calculer l'inverse des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$

3. $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & 4 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5. $B' = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

2. $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

4. $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

6. $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 7 & 5 \\ 7 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solution :

1. $A^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

5. $B'^{-1} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} -18 & 24 & -25 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

2. $A'^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

3. $B^{-1} = \frac{1}{125} \begin{pmatrix} -16 & -17 & 58 \\ 29 & 23 & -27 \\ -10 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

6. $D^{-1} = \frac{1}{510} \begin{pmatrix} 35 & -56 & -2 & 59 \\ -165 & 162 & 24 & 57 \\ -10 & -86 & 88 & -46 \\ 85 & 68 & -34 & -17 \end{pmatrix}$

4. $C^{-1} = \frac{1}{117} \begin{pmatrix} 8 & -7 & 13 \\ -10 & 38 & 13 \\ 19 & -2 & -13 \end{pmatrix}$